אנליזת פורייה
צחי אבנור

Zachi Evenor
Email: z-evenor@lycos.com
Home Page: http://www.tau.ac.il/~bahatgal

אנליזה הרמונית (אנליזת פורייה)

(סוכם ע"י צחי אבנור לפי הרצאות של פרופ' דוד אנדלמן)

טורי פורייה

מוטיבציה: להציג כל פונקציה כטור אינסופי של סינוסים וקוסינוסים, בדומה לטורי טיילור.

פיתוח לטור פורייה: תהי $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, אזי פיתוח לטור פורייה של f הוא

$$\boxed{f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\theta)} \qquad (1)$$

הדלתא של קרונקר: $\delta_{mn}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$.

אורתוגונליות של בסיס ההרמוניות (שלושה אינטגרלים חשובים):

$$\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)\sin(m\theta)d\theta=\pi\cdot\delta_{nm} \qquad \int_0^{2\pi}\sin(n\theta)\cos(m\theta)d\theta=0 \qquad \int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta=\pi\cdot\delta_{nm}$$

חישוב מקדמי פורייה: לכל $m=1,2,3...$ ניתן לחשב את מקדמי פורייה באמצעות המשוואות הבאות:

$$\boxed{\begin{array}{ll}(2.a) & a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta\\ (2.b) & a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos(m\theta)d\theta\\ (2.c) & b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin(m\theta)d\theta\end{array}} \qquad (2)$$

טור פורייה של גל מרובע:

$$\square(\theta)=\begin{cases}0 & 0\le\theta<\pi\\ 1 & \pi<\theta\le 2\pi\end{cases}\Rightarrow \square_f(\theta)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{1}+\frac{\sin 3\theta}{3}+\frac{\sin 5\theta}{5}+...\right)$$

זהות שימושית (הטור של פאי): $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$.

זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(mx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos\left((m-n)x\right)-\cos\left((m+n)x\right)\right]$$

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos\left((m-n)x\right)+\cos\left((m+n)x\right)\right]$$

$$\cos(mx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left[\sin\left((m-n)x\right)+\sin\left((m+n)x\right)\right]$$

מחזוריות טורי פורייה: $f(\theta)=f(\theta+2\pi)$.

טור פורייה עבור פונקציות זוגיות: $f(\theta)=f(-\theta)\Rightarrow\boxed{f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\theta)}$.

טור פורייה עבור פונקציות אי-זוגיות: $f(\theta)=-f(-\theta)\Rightarrow\boxed{f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\theta)}$.

מכפלה פנימית במרחב הפונקציות: $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta$: $\forall f,g\in[0,2\pi]\to\mathbb{R}$.

משפט פרסבל (הפיתגורס של הפונקציות): $\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\int_0^{2\pi} f^2(\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}(a_0)^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2$.

טור פורייה על פונקציה מחזורית, עם מחזור L: יהא f מחזור של הפונקציה שמוגדר בתחום $[0,L]$, אזי נציב $\theta=\frac{2\pi}{L}x$ וטור פורייה שלו יראה כך:

$$\boxed{\forall x\in[0,L]:\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)} \tag{3}$$

כאשר מקדמי פורייה נתונים ע"י:

$$\boxed{a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx}\quad\boxed{a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)dx}\quad\boxed{b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)dx} \tag{4}$$

טור פורייה ברישום מרוכב (טור אקספוננטים): ברוב המקרים, זה הרבה יותר נוח לעבוד עם אקספוננטים מאשר עם סינוסים וקוסינוסים, לפי משפט אוילר: $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ואם נגדיר $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+i\cdot b_n)$ $c_n=\frac{1}{2}(a_n-i\cdot b_n)$ וכן $c_0=\frac{a_0}{2}$, אזי טור פורייה יראה כך: $f(\theta)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-in\theta}$. שימו לב ש $\overline{c_n}=c_{-n}$ צמודים ושניתן לאחד אינדקסים. אזי:

$$\boxed{\forall\theta\in[0,2\pi]:\ f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\theta}} \tag{5}$$

כלומר, האינדקס n רץ בצורה $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$. כמו כן, המקדמים של טור זה נתונים ע"י:

$$\boxed{n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\quad:\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cdot e^{-in\theta}d\theta} \tag{6}$$

רישום זה כולל את המקרים של c_0 וכן את המקרים של c_{-n}.

אורתוגונליות בסיס האקספוננטים: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}e^{-im\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta=\delta_{nm}$.

טור פורייה (מרוכב) למחזור באורך L:

$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{-L}{2},\frac{+L}{2}\right]:\quad f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\left(\frac{2\pi}{L}\right)nx}} \tag{7}$$

כאשר המקדמים נתונים ע"י

$$\boxed{n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\quad:\quad c_n=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(x)\cdot e^{-i(2\pi/L)nx}dx} \tag{8}$$

טרנספורם פורייה

מוטיבציה: טור פורייה בגבול $L \to \infty$ (פונקציה על כל הישר הממשי).

טרנספורם פורייה:

$$\boxed{\mathbf{F}: \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{iyx}dy} \tag{9}$$

ה טרנספורם ההפוך:

$$\boxed{\mathbf{F}^{-1}: \qquad g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx} \tag{10}$$

או בסימון אחר שנהוג בהרבה ספרים:

$$\mathbf{F}^{-1}: \qquad \hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \tag{'10}$$

הערה: בשביל לקבל סימטרייה בין מש' (9) ו (10) אפשר להגדיר $\tilde{f}(x)=\sqrt{2\pi}f(x)$.

משפט פרסבל: $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|^2dy$.

<u>תכונות טרנספורם פורייה</u> $\mathbf{F}^{-1}\left[g(y)\right]=f(x) \quad , \quad \mathbf{F}\left[f(x)\right]\overset{(9)}{=}g(y)$ **:**

1. **אינווריאנטיות הגאוסיאן:** $f(x)=e^{-(x^2/\sigma^2)} \Rightarrow g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/\sigma^2}e^{-iyx}dx=\sigma\sqrt{\pi}\cdot e^{-(y^2\sigma^2/4)}$.
2. **ליניאריות:** $\mathbf{F}\left[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right]=\alpha\mathbf{F}\left[f_1(x)\right]+\beta\mathbf{F}\left[f_2(x)\right]=\alpha g_1(y)+\beta g_2(y)$.
3. **זוגיות:** אם $f(x)=f(-x)$ זוגית וממשית אזי $g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)dy$ זוגית וממשית.
4. **אי-זוגיות:** אם $f(x)=-f(-x)$ אי-זוגית וממשית אזי $g(y)=-i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)dx$ אי-זוגית ודמיונית. כמו כן, מקובל להגדיר $\tilde{g}(y)=i\cdot g(y)$.
5. **טרנספורם של נגזרת:**
$$\mathbf{F}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]=\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ixy}dy=(iy)^n\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ixy}dy=(iy)^n\mathbf{F}\left[f(x)\right].$$
6. **הזזה:** אם $\mathbf{F}\left[f(x)\right]=g(y)$ אזי $\mathbf{F}\left[f(x+a)\right]=e^{iya}\cdot g(y)$.
7. **מכפלה:** אם $\mathbf{F}[f_2(x)]=g_2(y)$, $\mathbf{F}[f_1(x)]=g_1(y)$ אזי $\mathbf{F}[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(y')g_2(y-y')dy'=g_1*g_2$.

קונבולוציה: $\boxed{(f*g)(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g(a-x)\cdot dx}$.

טרנספורם של קוסינוס: $\mathbf{F}\left[\cos(ax)\right]=\frac{1}{2}\left[\delta(y-a)+\delta(y+a)\right]=g(y)$.

טרנספורם פורייה תלת-ממדי: $\boxed{f(\vec{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint_{\infty} g(\vec{k})\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}\cdot d^3\vec{r}}$.

פונקציית הדלתא של דיראק

http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html

המשוואה המגדירה את פונקציית הדלתא של דיראק:

$$\boxed{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(x-t)\cdot dt} \qquad (11)$$

פונקציית דלתא כמסקנה של טרנספורם פורייה:

$$\boxed{\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}dy} \qquad (12)$$

אינטגרל על פונקציית הדלתא של דיראק:

$$\boxed{1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx} \qquad (13)$$

קירובים לפונקציות דלתא: $\delta(x)\underset{n\to\infty}{\leftarrow}\delta_n(x)=\frac{\sin(n\cdot x)}{\pi\cdot x}$, $\delta(x)\underset{\varepsilon\to 0}{\leftarrow}h_\varepsilon(x)=\begin{cases}1/\varepsilon & if\ |x|<\varepsilon/2\\ 0 & if\ |x|>\varepsilon/2\end{cases}$.

זוגיות פונקציית דלתא: $\delta(x)=\delta(-x)$.

כפל בתוך הארגומנט של פונקציית דלתא: $\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}$.

משפט: $\delta\left[g(x)\right]=\sum_{g(x_i)=0}\frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$ ומכאן אפשר להסיק ש $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta\left(g(x)\right)dx=\sum_{g(x_i)=0}\frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$.

טענה: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)dx=-f'(0)=-\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}$.

פונקציית הביסייד Heaviside: הפונקציה הקדומה של דלתא, $\boxed{H(x)=\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)dt=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}}$.

גזירה של פונקציה לא רציפה: למשל $f(x)=\begin{cases}x^3 & x>1\\ x^2+2 & x<1\end{cases}=(x^2+2)\cdot\theta(1-x)+x^3\cdot\theta(x+1)$

אזי $\frac{df(x)}{dx}=(2x)\cdot\theta(1-x)-(x^2+2)\cdot\delta(1-x)+(3x^2)\cdot\theta(x-1)+x^3\cdot\delta(x-1)$.

גזירת פונקציית הסימן: $\frac{d\,\mathrm{sgn}(x)}{dx}=2\cdot\delta(x) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}=\theta(x)-\theta(-x)$.

אינטגרל שימושי: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.