חשבון אינפינטסימלי 1.

מרצה: פרופסור יהורם גורדון*

תוכן עניינים

*הוקלד על ידי רונן אברבנאל ronen@tx.technion.ac.il. גרסא מעודכנת ניתן למצוא ב-www.technion.ac.il/~ronen/.

חלק I

תאור המספרים הממשיים.

אקסיומות המספרים הממשיים. מסומנים ב: $\mathbb{R}$

תכונות אלו נקראות אקסיומות ומגידרות מהו מסר ממשי. מספרים ממשיים ורק מספרים ממשיים מקיימים את כולם.

ישנן 13 אקסיומות:

0.0.1 אקסיומות השדה

עבור שדה F

1. לכל $a,b \in F$ גם $a+b \in F$
2. לכל $a,b \in F$ יש $a+b=b+a$ (חילופיות, קומטטיביות)
3. לכל $a,b,c \in F$, $a+(b+c)=(a+b)+c$(אסוציטיביות)
4. קיים איבר שנסמן ב 0 שמקיים $a+0=a$ לכל $a \in F$
5. לכל $a \in F$יש איבר שנסמן ב $-a$כך ש $a+(-a)=0$
6. לכל $a,b \in F$ גם $a \cdot b \in F$
7. לכל $a,b \in F$ מתקיים $ab=ba$
8. לכל $a,b,c \in F$ מתקיים $(ab)c=a(bc)$ח
9. קיים איבר שנסמן ב 1 שמקיים $\forall a: 1 \cdot a = a$
10. לכל $0 \neq a \in F$ קיים $a^{-1} \in F$כך ש: $a \cdot a^{-1} = 1$
11. $\forall a,b,c \in F$ מתקיים $a(b+c)=ab+ac$(דיסטריביוטיביות)

נסמן לכל $y \neq 0$: $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$

0.0.2 אקסיומות הסדר

אקסיומות נוספות שחלות על $\mathbb{R}$ הן אקסיומות הסדר:

ל $\mathbb{R}$יש תת קבוצה אמיתית P(שנקראת המספרים החיובים) כך ש: $P \subset\neq \mathbb{R}$

1. לכל $x,y \in P$ גם $x+y \in P$
2. לכל $x,y \in P$ גם $x \cdot y \in P$
3. לכל $x \in \mathbb{R}$מתקיים אחד ורק אחד מהתנאים:

<u>או</u> $x \in P$ <u>או</u> $-x \in P$ <u>או</u> $x=0$

שדה סדור הוא שדה שמקיים את 1-9 ואת 1-3.

נסמן $y > x$ (או $y < x$) אם $x - y \in P$.

טענה 0.1 $1 \in P$

הוכחה: על דרך השלילה נניח $1 \notin P$ ואז $-1 \in P$ ואז $1 = -1 \cdot -1 \in P$ וזה סותר את הנחת הייסוד!

קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$מקיימת גם היא את כל האקסיומות הנ"ל למרות ש $\mathbb{Q} \subset\neq \mathbb{R}$. ■

אקסיומת השלמות

הגדרה 0.2 בהנתן קבוצת מספרים ממשיים S נאמר שמספר ממשי b הוא חסם מלעיל עבור S אם לכל $s \in S$ מתקיים $s \leq b$.

לדוגמא: עבור הקבוצה $S = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}..., \}$: 1 הוא חסם מלעיל, וגם 38, וגם אפס הוא חסם מלעיל. כאן החסם המינימלי הוא 0.

הגדרה 0.3 חסם מלעיל b יקרא <u>חסם עליון</u> אם לא קיים מספר cשמקיים $c < b$ ו-c הוא חסם מלעיל.

נסמן את החסם העליון של הקבוצה S על ידי $\sup S$.

0.0.3 אקסיומת השלמות

המספרים הממשיים מקיימם אקסיומה נוספת המכונה אקסיומת השלמות:

לכל קבוצה של ממשיים שחסומה מלעמלה יש סופרימום.

0.1 המספרים הממשיים

9 אקסיומות השדות, שלוש אקסיומות הסדר ואקסיומת השלמות מגדירות את המספרים הממשיים ואך ורק את המספרים הממשיים.

מספרים מרוכבים - אינם מקיימים את אקסיומת הסדר - מהווים שדה לא סדור.

המספרים הטבעיים - הקבוצה $\{1,2,3...\}$

המספרים השלמים: $\{1,-1,2,-2,3,-3...\}$

המספרים הטבעיים מקימים את תכונת ארכימדס:

לכל מספר ממשי xיש מספר טבעי nכך ש $x<n$.

הוכחה: נסמן ב Sאת כל המספרים השלמים k שמקיימים x $k\leq x$:

$S=\{k\in F|k\leq x\}$

לשם הנוחיות, נניח ש .

S חסומה מלעיל על ידי x ולכן לפי אקסיומת השלמות קיים $k_0=\sup S$.

אזי $k_0-1/2$ אינו חסם מלעיל ולכן קיים k_1 ששייך ל S שעבורו $k_1<k_0\frac{1}{2}$ כי אחרת יהיה לכל $k\in S$ $k\leq k_0-\frac{1}{2}$וזו סתירה להגדרת k_0שהוא הקטן ביותר שמקיים $k\leq k_0$ לגל $k\in S$.

ואם $s\in S$: $S\leq k_0<k_0+\frac{1}{2}=k_0-\frac{1}{2}+1<k_1+1$.

ולכן $k_1+1\notin S$ולכן $x<x+k_1$. ■

מסקנה 0.4 בין כל 2 מספרים ממשיים $x<y$יש מספר רציונלי r כל ש $x<r<y$.

0.1.1 שורשים

משפט 0.5 נגדיר את $x^{1/n}$ עבור $x>0, n\in Q$: $x^{1/n}$הוא המספר y_0 שעבורו $y^n=x$.

הוכחה: $S=\{y\in R|y^n\leq x, y\geq 0\}$.

זוהיא קבוצה לא ריקה כי $0\in S$. כמו כן, S חסומה מלעיל ולכן, על פי אקסיומת השלמות היא יש לה סופרימום $\sup S$.

$(x+1)^n>x\Rightarrow x+1>y\forall y\in S$

לפי אקסיומת השלמות יש לS חסם עליון שגודלו y_0, הוא השורש של x. ■

0.1.2 הרציונאלים צפופים בממשיים

משפט 0.6 לכל α ממשי ולכל ε חיובי יש 2 מספרים $r_1,r_2\in Q$ שמקיימים $r_1<\alpha<r_2$ וגם $r_2-r_1<\varepsilon$.

הוכחה: נבחר מספר רציונאלי $r<\alpha$.

נבחר מספר רציונאלי $0<S<\varepsilon$

לפי תכונת ארכימדס יש מספר טבעי n כך ש $n>\frac{\alpha-r}{s}$

יהיא n_0 המס' הטבעי הכי קטן שמקיים זאת.

אזי $n_0>\frac{\alpha-r}{s}>n_0-1$

$r+sn_0>\alpha>r+s(n_0-1)$

יהי $r_1=r+sn_0, r_2r+s(n_0-1)$. ■

משפט 0.7 לכל מפר ממשי αיש יצוג בעזרת מספר עשרוני אינסופי.

$\sqrt{2} = 1.41...$

$2.0 = 1.99999...$

הוכחה: נניח $\alpha > 0$ אינו רציונלי לשם נוחיות.

נמצא n_0 שלם ראשון כך ש $n_0 < \alpha < n_0 + 1$

נסתכל על נסדרה הבאה של מספרים:

$n_0, n_0 + \frac{1}{10}, n_0 + \frac{2}{10}, n_0 + \frac{3}{10}, n_0 + \frac{4}{10}, n_0 + \frac{5}{10}, n_0 + \frac{6}{10}, n_0 + \frac{7}{10}, n_0 + \frac{8}{10}, n_0 + \frac{9}{10}$

α נופל בין 2 מספרים סמוכים.

$0 \le n_1 \le 9$ ושלם כך ש

$n_0 + \frac{n_1}{10} \le \alpha \le n_0 + \frac{n_1+1}{10}$

וכך נמשיך עד אינסוף. ■

חלק II

תורת הגבולות

1 גבולות של סדרות

הגדרה 1.1 סדרה אינסופית היא סדרה שיש לה הצגה ברורה $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ כאשר $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3 \dots)$

1.1 הגדרת הגבול

הגדרה 1.2 מספר ממשי a יקרא הגבול של סדרה נתונה $a_1, a_2, \dots$ (שמסומנת גם $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$) אם לכל $\varepsilon > 0$ (קטן כרצוננו) יש מספר טבעי N (התלוי ב-ε ונסמנו לעיטים $N(\varepsilon)$ שעבורו לכל $n > N$ טבעי יהיה $|a_n - a| < \varepsilon$.

נסמן אז

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \qquad a_n \to a$$
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

משפט 1.3 סדרה a_n לא יכולה להתכנס לשני גבולות שונים (יש להוסיף הוכחה)

1.2 משפטי עזר לחישוב גבולות

משפט 1.4 משפט הסנדוויץ'

אם $a_n \le b_n \le c_n$ לכל $n = 1, 2 \dots$ ואם $a_n \to a, c_n \to a$ אזי גם $b_n \to a$. (יש להוסיף הוכחה)

משפט 1.5 אם $a_n \to a,\ b_n \to b$ אזי $a_b + b_n \to a + b$. (יש להוסיף הוכחה)

משפט 1.6 אם $a_n \to a,\ b_n \to b$ אזי $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

משפט 1.7 אם $a_n \to a$ וכן $a \neq 0$ אזי $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

1.3 תת סדרה

הגדרה 1.8 תהי $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ סדרת מספרים עולה ותהיי נתונה סדרה $a_n (n = 1, 2, 3 \ldots)$
אזי הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2} \ldots\}$ תקרא תת סדרה.

משפט 1.9 אם $a_n \to a$ אז כל תת סדרה של a_n, $a_{n_k} \to a$. (יש להוכיח)

משפט 1.10 אם יש סדרה בעלת מספר תתי סדרות אשר אינן מתכנסות לאותו הגבול אזי הסדרה המקורית אינה מתכנסת.

1.4 חזקות ממשיות

הגדרה 1.11 הגדרנו חזקות עבור α רציונלי, נגדיר עתה עבור α לר רציונילי. נטפל במקרה $a > 1$ (כאשר $a < 1$ אזי $a^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}}$).

תהיה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת רציונאלים עולה המתכנסת ל-α אזי a^{r_n} חסומה מלעיל. יהי k טבעי $k > \alpha$, אזי $r_n < k$ לכל n ולכן $a^{r_n} < a^k$.

לכן יש גבול ונסמנו

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

1.5 הלמה של קנטור

למה 1.12 יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$

1. $a_n \leq a_{n+1} \leq b_n \leq b_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ($\downarrow b_n, \uparrow a_n, a_n < b_n$)
2. $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

אזי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{a\to\infty} b_n$$

והגבול הוא מספר סופי.

הגדרה 1.13 לסדרה $I = [a_n, b_n]$ קוראים סדרת קטעים אפסים.

מסקנה 1.14 לסדרת קטעים אפסים יש נקודה אחת יחידה שמשותפת לכולם.

1.6 משפט בולצאנו ורישטראס

משפט 1.15 מכל סדרה חסומה ניתן להוציא תת סדרה מתכנסת.

משפט 1.16 אם a_n סדרה לא חסומה ניתן למצוא תת סדרה שמתכנסת ל-$+\infty$ או $-\infty$.

1.7 סדרות

סדרה אינסופית זאת קבוצה שבה יש הצגה בצורה

$a_1, a_2, a_3..., a_n$

כאשר $a_k \in R$ $(k = 1, 2, 3...)$היא האיבר ה k של הסדרה.

סדרה היא גם פונקציה f שמעתיקה את הטבעיים לממשיים $f \to R$

$f(k) = a_k (k = 1, 2, 3...)$

הגדרת גבול של סדרה

מס' ממשי יקרא הגבול של סדרה נתונה $a_1, a_2, ..a_n..$ אם לכל $\varepsilon > 0$ יש מס' טבעי N (שתלוי ב ε) שעבורו לכל $n > N$ טבעי יהיה

$|a_n - a| < \varepsilon$

1.8 סדרת הממשיים

$r = \frac{n}{m}, 0 \leq n \leq m$ הרציונאלים ב $[0, 1]$

$$\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} \end{matrix}$$

הרציונאלים בכל קטע סופי או לא סופי מהווים סדרה אינסופית, ולכן כל מספר ממשי הוא גבול של סדרת הרציונאלים.

<u>הגדרה:</u> גבול חלקי של סדרה נתונה הוא גבול של תת סדרה שלה.

משפט 1.17 אם לסדרה נתונה $\{a_n\}$ יש גבול חלקי אחד ויחיד a, אזי כל הסדרה $a_n \to a$

<u>הוכחה:</u> יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. נסתכל על קטע $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

טענה: כל איברי הסדרה מלבד מספר סופי של איברים נמצאים בקטע הזה.

נניח שהטענה שגויה. אזי יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שמחוץ לקטע $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ יש אינסוף a_n-ים. אזי לקבוצה הזו, שהיא תת סדרה יש גבול חלקי l, $a \neq l$, וזו סתירה, אזי יש גבול.

טענה: לכל סדרה $a_n \to \infty$, $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \to e$.

מכאן: $(1 + \frac{x}{a_n})^{a_n} \to e^x$. לכל x ממשי.

להוכחה צריך להעזר בטענה הבאה: אם $b_n \to 1$ אזי $b_n^x \to 1 \forall x$.

$$\left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{x}}\right)^x \to e^x$$

אם $c_n \to c$ אזי $c_n^x \to c^x$.

צ"ל אם $\frac{c_n^x}{c^x} \to 1$.

נניח $x > 0$, יהי $\varepsilon > 0$כלשהו.

קיים N כך שלכל $n > N$ יהיה $1 - \delta < b_n < 1 + \delta$. כאשר $\delta > 0$.

$$
\begin{aligned}
0 \quad < \quad & \delta < min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2^{[x]+1}}\right\} \\
& L = [x] + 1 \\
& 1 - \varepsilon < 1 - \delta \cdot 2^L < 1 - L\delta < (1-\delta)^L < \\
< \quad & (1-\delta)^x < b_n^x < (1+\delta)^x < (1+\delta)^L = \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{K} \delta^{k-1} < 1 - \delta \sum_{1}^{L} \binom{L}{K} \\
< \quad & 1 + \delta \sum_{0}^{k} \binom{L}{K} = 1 + \delta (1+1)^L = 1 + \delta \cdot 2^L < 1 + \varepsilon \\
& 1 - \varepsilon < b_n^x < 1 + \varepsilon \\
& b_n^x \to 1
\end{aligned}
$$

1.9 קריטריון ההתכנסות של קושי

<u>משפט:</u> סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול סופי אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קים $N = N(\varepsilon)$ שעבורו לכל $N < n, m$ יהיה $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

<u>הוכחה:</u>

נניח$a \to a_n$, אזי קיים N כך שלכל $n > N$ יהיה $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, ואם גם $N < m$, אזי $|a_m - a| < \varepsilon/2$.,

$$
|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
$$

נניח ומתקיים התנאי על $\{a_n\}$.

צ"ל שa_n מתכנסת לגבול סופי. ניקח $\varepsilon = 1$ונבחר $m = N + 1$. יהי $N < n$ כלשהו.

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| \quad < \quad & 1 \\
& 1 - a_m < a_n < 1 + a_m
\end{aligned}
$$

אזי קיימת תת סדרה ל $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת לגבול a. נוכיח כי כל הסדרה $a_n \to a$. יהי $\varepsilon > 0$ ו Nכמו בתנאי. אזי אם $n_k > N$ וגם $N < n$ אזי $|a_{n_k} - a_n| < \varepsilon$. אבל $a_{n_k} \to a$, ולכן קיים N' כך שכאשר $n_k > N'$ יהיה $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

נבחר את $N'' = max\,(N, N')$. אזי אם $n > N''$ נבחר n_k מספיק גדול כלומר, $n_k > N''$. אזי מתקיים $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ וגם $|a_{n_k} - a_n| < \varepsilon$.

מתקיימים

$$
|a_n - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
$$

הטור:

$$
S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}
$$

יהי $m < n$ כלשהו.

$$
\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + ..\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) \\
&= \frac{1}{m+1} - \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + ..\right) \\
&\leq \frac{1}{m+1} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

לכן לכל $n > m > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ יהיה $|S_n - S_m| < \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \\
& s_n \to +\infty \\
& S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

קריטריון קושי לא מתקיים לכן הסדרה לא מתכנסת לגבול סופי אבל $s_n \uparrow$ ולכן $s_n \to +\infty$.

1.10 גבול עליון וגבול תחתון

תהיה $\{a_n\}$ סדרה, אזי יש לה לפחות תת סדרה אחת שמתכנסת במובן הרחב. לגבול של תת-סדרה קוראים גבול חלקי.

נסמן ב$\bar{l} = \overline{\lim} a_n$את הגבול החלקי הגדול ביותר ויקרא גבול עליון של הסדרה.

נסמן ב $\underline{l} = \underline{\lim} a_n$את הגבול החלקי הקטן ביותר, שיקרא גבול תחתון.

אם $\{a_n\}$ חסומה אזי $-\infty < \underline{l} \leq \bar{l} < \infty$.

נניח עתה, $\{a_n\}$ חסומה. נסמן $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}...\}$.

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \sup\{a_1, a_2...a_n\} \\
b_2 &= \sup\{a_2...a_n\}
\end{aligned}
$$

אזי $\{b_n\}$ לא עולה וחסומה, ולכן יש לה גבול $b_n \to b$.

<u>טענה</u>: $b_n \to b = \overline{\lim}\, a_n$.

באופן דומה ניתן להגדיר $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1} + ...\}$. אזי c_n סדרה לא יורדת. $c_n \to \underline{\lim} a_n$.

$b_n - \frac{1}{n}$ איננו חסם מלעיל לסדרה $\{a_n, a_{n+1}...\}$ ולכן יש בסדרה הזו איבר $b_n - \frac{1}{n} \leq a_{k_n} \leq b_n$ ולכן a_{k_n} מתכנסת לb.

מכאן, b הוא אומנם גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}$. נוכיח כי b הגדול החלקי הגדול <u>ביותר</u>. תהי $\{a_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה כלשהי שמתכנסת לגבול l. נוכי כי $l \leq b$.

נגדיר $d_n = \sup\{a_{j_1}, a_{j_2}, ..a_{j_n}...\}$.

אזי $d_n \to l$.

אבל $d_n \leq \sup\{a_{j_n}, a_{j_n+1}, ..\} = b_{j_n}$.

ולכן $l \leq b$

<u>הוכחנו</u> תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ונגדיר

$$
\begin{aligned}
b_n &= \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \\
c_n &= \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}
\end{aligned}
$$

אזי $b_n\downarrow$ במובן החלש, $c_n\uparrow$ במובן החלש. אזי אם נסמן $\overline{\lim}a_n$ את הגבול העליון ו$\underline{\lim}a_n$ את הגבול התחתון של $\{a_n\}$ והוכחנו כי $\lim_{n\to\infty} b_n=\overline{\lim}a_n$ ובאופן דומה - $\lim_{n\to\infty} c_n=\underline{\lim}a_n$.

<u>מסקנה</u>: סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\overline{\lim}a_n=\underline{\lim}a_n$.

<u>הוכחה</u>: אם $a_n\to a$ אזי כל תת סדרה מתכנסת ל-a ולכן הגבול העליון שווה לגבול התחתון.

ולהיפך, אם גבול עליון שווה לגבול תחתון, נסמנו ℓ, אזי כל תת סדרה שמתכנסת חייבת להתכנס לℓ.

והוכחנו שאם כל תת סדרה שמתכנסת, מתכנסת למספר קבוע ℓ, אזי גם הסדרה כולה מתכנסת לℓ.

1.11 נקודת הצטברות וקבוצות סגורות.

נסמן Φ הקבוצה הריקה.

<u>הגדרה</u>: תהיה $E\subset R$ קבוצה כלשהי. נאמר כי נקודה $a\in R$ היא נקודת הצטברות אם לכל $\varepsilon>0$ סביבה של a, הקטע $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ מכיל לפחות נקודה אחת של הקבוצה Eששונה מ-a. (הסביבה חייבת להכיל אינסוף נקודות אחרת ניתן למצוא סביבת ε קטנה יותר שלא תכיל נקודות).

למשל, אם $E=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $a_n\neq a$ (לכל האיברים פרט אולי למספר סופי), ואם $a_n\to\ell$ אזי ℓ נקודת הצטברות של E. וכמובן גם כל גבול חלקי ששונה מ-a היא נקודת הצטברות של E. וכמובן גם כל גבול חלקי ששונה מ-aהיא נקודת הצטברות.

<u>הערה</u>: כמו כן, כל ε סביבה של a מכילה אינסוף נקודות שונות מa של E $\Leftrightarrow$ a נקודת הצטברות של E.

נסמן בE' את קבוצת נקודות ההצטברות של E.

<u>דוגמאות</u>:

1. $E=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $E'=\{0\}$
2. $E=\{1,2,3,4\}$, $E'=\Phi$
3. $E=(0,1)$, $E'=[0,1]$, $E\subset E'$.
4. $E=\left\{\frac{1}{m}+(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $E'=\{-1,1\}$.
5. $E=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}|n,m=1,2,3,\ldots\right\}$, $E'=\left\{\frac{1}{n},0\right\}_{n=1}^{\infty}$
6. $E=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{l}\right\}_{n,m,l=1}^{\infty}$, $E=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{m},0\right\}_{n,m=1}^{\infty}$, $E''=(E')'$. $E''=\left\{\frac{1}{k},0\right\}_{k=1}^{\infty}$. $E^{(III)}=\{0\},E^{(IV)}=\Phi$.
   הקבוצה E' נקראת ה"נגזרת" של הקבוצה E.

באינדוקציה, ניתן להגדיר את הנכזרת ה k של E על ידי, $E^{(k)}=\left(E^{k-1}\right)'$

בהנתן E, נקודה a תקרא נקודה בודדת של E אם קיים $\varepsilon_0>0$ כך ש $(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)\cap E=\{a\}$.

למשל, $E=\{1,2,3,\ldots\}$, אזי הנקודות המבודדות הן $\{1,2,3,\ldots\}$. הקטע $E\cap\left(3-\frac{1}{2},3+\frac{1}{2}\right)$ מכיל רק את 3.

<u>משפט</u>: $E''\subseteq E'$

<u>הוכחה</u>: צ"ל שאם a היא נקודת הצטברו של E' אזי a (כלומר, $a\in E''$) היא גם נקודת הצטברות של E. (ז"א, $a\in E'$).

נניח שזה לא נכון. אזי יש $\varepsilon_0>0$, כך שסביבתו לא מכילה אף נקודה של E ששונה מ-a.

בפרט, הרווח $(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)$ מכיל אינסוף נקודות של E' ששונות מ-a. נבחר אחת כזו, ונסמנה b.

אזי, יש רווח $(b-\varepsilon_1,b+\varepsilon_1)\subset(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)$ ולרווח הזה יש אינסוף נקודות של E, ובפרט יש גם ברווח $(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)$.

$E=\{a\}$ -קבוצה. $E'=\Phi$

אם רוצים לסמן סדרה שבה כל איבר=a מסמנים $a_n=a,n=1,2,3,\ldots$.

$E=\{a_n|a_n=a,n=1,2,3,\ldots\}$, $E'=\{a\}$.

<u>משפט</u>. תהי E חסומה מלעיל. נסמן $M=\sup E$. אם $M\notin E$ אזי $M\in E'$.

<u>הוכחה</u>. נתון: $M\notin E$, נסתכל ב$M-\frac{1}{n}(n=1,2,3,\ldots)$. זה לא חסם מלעיל, ולכן ברווח $\left(M-\frac{1}{n},M\right)$ אינסוף נקודות של E ששונות מ-M, לכן כל סביבת ε של M מכילה אינסוף נקודות של E ששונות מ-M, ולכן $M\in E'$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה E תקרא סגורה אם $E' \subseteq E$.

E' סגורה כי $E'' = (E')'$ מוכל ב-E.

המשלים של קבוצה סגורה נקראת קבוצה פתוחה ומסומנת E^c או $R \setminus E$. וכמובן, המשלים של קבוצה פתוחה היא קבוצה סגורה.

<u>משפט</u>: לכל E, ולכל $A \subseteq E$ מתקיים ש: $(A \cup E')' \subseteq E'$, ובפרט, $E' = (E \cup E')'$, כי $E \subseteq E \cup E'$, $E' \subseteq (E \cup E')' \subseteq E'$.

<u>הוכחה</u>: נקח $x \in (A \cup E')'$, אזי x נקודת הצטברות של $A \cup E'$. אזי כל $\varepsilon > 0$ סביבה של x מכיך אינסוף נקודות של $A \cup E'$.

א. אם כל ε סביבה מכיל אינסוף נקודות של A, אזי גם של E, ולכן $x \in E'$.

ב. קיים $\varepsilon_0 > 0$, כך שסביבת ε_0 של x מכיל רק מס' סופי של נקודות A. אזי סביבה זו מכילה ∞ נקודות של E' ששונות מ-x. נוכל להניח שאין אף נקודה של $A \in (x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0)$.

יהי $\varepsilon > 0$, אזי $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0)$ מכיל ∞ נקודות של E', ולכן $x \in E'' \subset E'$.

<u>מסקנה</u>: אם E סדרה $E = \{a_n\}_1^\infty$, אזי קבוצת הגבולות החלקיים של E היא קבוצה סגורה.

<u>הוכחה</u>: נסמן ב-A את קבוצת הגבולות החלקיים של E. צריך להוכיח $A' \subset A$. $A \subseteq E'$ ולכן $A' \subseteq E'' \subset E'$.

צ"ל $A' \subseteq A$.

1. איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה. מכאן: חיתוך כלשהו של בוצות סגורות היא קבוצה סגורה
2. E היא קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל $x \in E$ יש סביבה של x שמוכלת ב E.
3. אחוד של מס' סופי של קבוצות סגורות הוא סגור, ואיחוד אין סופי של קבוצות סגורות הוא לא בהכרח סגור. ומכאן - חתול אינסופי של קבוצות פתוחות הוא לא בהכרח פתות.

2 פונקציות

פונקציה $f(x)$ ממשית זו העתקה של קבוצה, שתקרא תחום הגדרה של f, אל קבוצה שתקרא טווח הפונקציה.

2.1 תכונות של פונקציות

- פעולות חשבון בין פונקציות:
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  - $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$
  - $f/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
  - $\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)}, \forall f(x) > 0$
- פונקציה $y = f(x)$ תקרא חד-חד ערכית אם הערך y מתקבל רק פעם אחת. כלומר, $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
  - $y = x^2$ לא חד יד ערכית אם תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}$. אם תכון ההגדרה הוא $\{x | x \geq 0\}$ אז הפונקציה היא חח"ע.
  - אם $y = f(x)$ אז ניתן לפתור ולמצוא x יחיד מהמשוואה. נסמן את הפתרון $x = f^{-1}(y)$.
  - נגדיר $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. f^{-1} נקראת הפונקציה ההפכית של f, תחום ההגדרה הוא הטווח של f וטווח f^{-1} הוא תחום ההגדרה של f.
- פונקציה $y = f(x)$ נקראת "מונוטונית עולה" או "עולה" אם $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- פונקציה $y = f(x)$ תקרא "יורדת" אם כאשר $x_1 > x_2$ יהיה $f(x_1) \leq f(x_2)$. נקראת גם פונקציה "לא עולה".

2.1.1 הרכבה של פונקציות.

תהיינה נתונות $y = f(x)$ ו $z = g(y)$ כאשר תחום ההגדרה של g הוא הטווח של f. אז $z = g(y) = g(f(x))$.

$z(x)$ תהיה ההרכבה של g ו f.

ההרכבה מסומנת ב $g \circ f$.

2.2 פונקציות אלמנטריות

- פולינום, פונקציה רציונלית (=מנה של שני פולינומים)
- פונקצית חזקה (a^x), פונקציה הלוגריתם.
- פונקציות טריגונומטריות וההפוכות.

2.2.1 פונקצית הלוגריתם

יהי $1 \neq a > 0$, $y = a^x$ מונוטונית ממש עבור $x \geq 0$ ויש לה פונקציה הפכית שהיא $\log_a y = x$.

$$\begin{aligned} y &= b^x \\ x &= \log_b y \\ \log_a y &= x \log_a b \\ \log_a y &= \log_b y \cdot \log_a b \\ \log_b y &= \frac{\log_a y}{\log_a b} \end{aligned}$$

ניתן להוכיח ישירות מההגדרה ומתכונות פונקצית החזקה. כמו כן,

$$\begin{aligned} \log_a(m,p) &= \log_a m + \log_a p \\ \log_a(m/p) &= \log_a m - log_a p \\ a^{\log_a(m/p)} &= \frac{m}{p} \\ a^{\log_a m - \log_a p} &= \frac{m}{p} \end{aligned}$$

2.2.2 פונקציות טריגונומטריות

<u>רדיאן</u> היא מידה של אורך המייצגת זווית. גודל הזווית המרכזית של מעגל הוא היחס בין אורך הקשת שמול הזווית לרדיוס המעגל.

π רדיאנים שווה ל180^o.

בעבור מעגל שרדיוסו 1, ומרכזו בראשית הצירים, עבור נקודה על המעגל שמחוברת עם מרכזו ברדיוס היוצר זווית θ עם ציר ה-x החיובי, $\sin\theta$ שיעור ה-y של הנקודה ו-$\cos\theta$שיעור ה-xשלה.

- עבור הפונקציה $y = \sin\theta$:
  - בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, הפונקציה עולה ממש וחח"ע, ואז $\theta = \arcsin y$, $-1 \leq y \leq 1$.
- הפונקציה $y = \cos\theta$ מונוטונית יורדת ממש ב-$[0,\pi]$הטווח $[-1,1]$ והפונקציה ההפוכה היא $\theta = \arccos y$.
- $y = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ עולה ב $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\theta = \arctan y$, $-\infty < y < \infty$.

2.3 גבול של פונקציה

הגדרה 2.1 לפי קושי:

תהי $y=f(x)$ מוגדרת בסביבה של x_0 (אולי לא ב-x_0). נאמר כי $f(x)$ שואפת למספר ℓ כאשר x שואף ל-x_0 ונכתוב $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, או $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell$, אם מתקיים: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, שעבורו לכל $0<|x-x_0|<\delta$ יהיה $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

הגדרה שקולה, לפי היינה:

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 (פרט אולי ל-x_0), נאמר $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ אם לכל סדרה $x_n\to x_0$ יהיה $\lim_{x\to\infty} f(x_n)=\ell$.

הוכחה: קושי $\Leftarrow$ היינה: תהי $x_n\to\neq x_0$. צ"ל $f(x_n)\to\ell$. יהיו ε,δ כמו בהגדרת קושי. אז קיים N כך ש-$0<|x_n-0|<\delta$ לכל $n>N$, ואז $|\ell-f(x_n)|<\varepsilon$.

היינה $\Leftarrow$קושי: נניח שקושי לא מתקיים: אז קיים $\varepsilon_0>0$ שעבורו לכל δ, בפרט אם ניקח $\delta=\frac{1}{n}\ (n=1,2,3\ldots)$, קיים $x_n\neq x_0$, $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, ו $\varepsilon_0<|\ell-f(x_n)|$.

ולכן $x_n\to\neq x_0$, אז $f(x_n)\to\ell$ (לפי היינה), וזו סתירה. ■

טענה 2.2 גבול של פונקציה בנקודה הוא <u>יחיד</u>.

הוכחה: כי גבול של סדרה הוא יחיד (בגלל המשפט הידוע בסדרות). ■

הגדרה 2.3 תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 (פרט אולי ל-x_0). נאמר ש-$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, אם לכל M גדול כרצוננו, קיים $\delta(M)>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$, יהיה $f(x)>M$.

לפי היינה: לכל $x_n\to x_0$ תהיה $f(x_n)\to+\infty$.

הגדרה 2.4 תהיה $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של x_0 ($x>x_0$). נאמר כי הגבול מימין ב-x_0 שווה למספר ℓ ונכתוב $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\ell$, או $\ell=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים δ שעבורו לכל x שמקיים $0<x-x_0<\delta$ יהיה $\varepsilon>|f(x)-\ell|$.

משפט 2.5 תנאי הכרחי ומספיק שלפונקציה $f(x)$ יהיה גבול בנקודה x_0 הוא שקיימים הגבולות החד-צדדיים ב-x_0 והם שווים. כלומר, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ (לשם קיצור, $f(x_0\pm 0)$).

הוכחה: נניח $f(x)\to\ell$, שאיפה משמאל ומימין תהיה ℓ. ■

בכיוון השני: נניח $\ell=f(x_0+0)=f(x_0-0)$. צריך להוכיח: $f(x)\to\ell$. לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר $0<\delta(\varepsilon)$ שעבורו לכל $0<x-x_0<\delta$ יהיה $|f(x-\ell|<\varepsilon$, ובאופן דומה, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta'(\varepsilon)>0$ שעבורו לכל $0<x_0-x<\delta'$ יהי $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

נבחר $\delta''=min(\delta,\delta')$, ואז לכל $0<|x-x_0|<\delta''$ יהיה $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

משפט 2.6 אם $\ell=\lim_{x\to x_0} f(x)$ ואם $M>\ell$, אז יש סביבה של x_0שבה $f(x)<M$. אז יש $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ יהיה $M-\ell>f(x)-\ell>\ell-M$, אזי $f(x)<M$.

יש משפטים כגון:

אם $f(x)\to\ell(x\to x_0)$ וגם $g(x)\to m$ אזי $f(x)+g(x)\to\ell+m$, $f(x)g(x)=\ell m$, $\frac{f(x)}{g(m)}\to\frac{\ell}{m}$ בתנאי ש $m\neq 0$..

הוכחה: המשפטים נכונים לסדרות, ולכן היינה מסים.

משפט הסנדוויץ: $f<g<h$ בסביבה נקובה של x_0 ואם $f\to\ell$ $h,$ אז $g\to\ell$.

הגדרה 2.7 תהי $f(x)$ מוגדרת וחסומה בקטע I ו-$x_0 \in I$ ונניח כי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\neq} x_0$, אזי $\{f(x_n)\}$ סדרה חסומה ולכן קיים לה גבול עליון וגבול תחתון שתלוי בבחירה של $E = \{x_n\}$. נסמן את הגבולות הללו על ידי $\underline{\ell} = \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$, הגבול התחתון הוא לפי ההגדרה $\underline{\ell} = \inf_E \underline{\ell}$ ובאפון אנלוגי גם לגבול עליון.

הגדרה 2.8 שקולה: $\underline{\ell} = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ הוא מספר שעבורו לכל סדרה מתכנסת $x_n \underset{\neq}{\to} x_0$ יהיה $\underline{\ell} \geq \underline{\lim} f(x_n)$ ויש סדרה $\underline{x_n} \to x_0$ כך ש-$f(\underline{x_n}) \to \underline{\ell}$.

2.3.2 קרטיון קושי להתכנסות

תנאי הכרחי ומספיק לכך שלפונקציה $f(x)$ יהיה גבול ב-x_0 הוא שלכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר $\delta(\varepsilon) > 0$ שעבורו לכל x_1, x_2 שמקיימות $0 < |x_i - x_0| < \delta$ ($i = 1, 2$) יהיה ההפרש $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

הוכחה: נניח שקיים הגבול $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ שעבורו לכל $0 < |x - x_0| < \delta$ יהיה $|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$. ואז לכל x_1, x_2 שמקיימות $0 < |x_i - x_0| < \delta$, יהיה $|f(x_i) - \ell| < \varepsilon/2$, ומאי שוויון המשולש: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. וזה מוכיח שהתנאי הכרחי. ■

תנאי מספיק: (נשמש במשפט שאנחנו יודעים על סדרות).

תהי $x_n \to x_0$ ויהי $\varepsilon > 0$ נתון, בהנתן $\delta > 0$ קיים N שעבורו לכל $m, n > N$ יהיה $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$, וגם $|x_m - x_0| < \delta/2$, ואז $|x_n - x_m| < \delta$ . . ולכן, $f(x_n) - f(x_m) < \varepsilon$. הסדרה $f(x_n)$ מקיימת את קרטריון קושי להתכנסות, ולכן $f(x_n)$ מתכנסת לגבול.

2.4 קריטריון קושי להתכנסות

משפט 2.9 תהי $f(x)$ מוגדרת בסיבת x_0 (פרט אולי ל-x_0) תנאי הכרחי ומספיק לכך שקיים $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ הוא שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $0 < \delta(\varepsilon)$ שעבורו לכל $x, x' \neq x_0$ המקיימות $|x - x_0| < \delta$ וגם $|x_0 - x'| < \delta$ יהיה $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

הוכחה: נניח שקיים ℓ, אז קיים δ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ יהיה $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ לכן לכל x, x' כנ"ל אזי $|f(x_0) - f(x')| < \varepsilon$ ומכאן $|f(x) - f(x')| < 2\varepsilon$. ■

ובכיוון ההפוך: נניח שהתנאי מתקיים ו$f(x)$ אין גבול ב-x_0. אז קיים $\varepsilon_0 > 0$, שעבורו לכל $\delta > 0$, בפרט $\delta = \frac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$, קיימות נקודות x_n , $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ כך ש $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon_0$.

$x_n \to x_0$ ו $f(x_n) \nrightarrow \ell$:

אז קיים N כך שלכל $m, n > N$, לכן $|x_n - x_0| < \delta$ וגם $|x_m - x_0| < \delta$ אזי $|f(x_m) - f(x_n)| < 2\varepsilon$, אזי $f(x_n)$ מתכנסת לגבול. סתירה!

משפט 2.10 תנאי הכרחי ומספיק לכך שקיים גבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ הוא שלכל $\varepsilon > 0$ קיים M שעבורו לכל $M < x, x'$ יהיה $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

פונקציה$f(x)$ תקרא חסומה בקבוצה A אם קיים $\sup_{x\in A} f(x) < \infty$, $\inf_{x\in A} f(x) > -\infty$ תנודת f מעל, $\omega_A(f) = \sup_A f - \inf_A f$.

משפט 2.11 אם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$ אזי $f(x)$ חסומה בסביבת x_0.

הוכחה: אם $x \to x_0$ אז $f(x) \to \ell$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ שעבורו $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ לכל $0 < |x - x_0| < \delta$. ■

2.5 רציפות של פונקציה

הגדרה 2.12 תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0, f תקרא רציפה ב-x_0 אם

$$f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

f תקרא רציפה מימין (משמאל) בנקודה x_0 אם $f(x_0)$ $\lim_{x\to x_0^{+(-)}}$

לדוגמא:

$$y = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ x^2 - \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$$

רציפה משמאל ולא מימין.

הגדרה 2.13 f תקרא רציפה בקטע $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

משפט 2.14 סכום, כפל, מנה, של פונקציות רציפות הוא רציף, אבל לגבי מנה זה זה נכון אם במכנה הפונקציה שונה מ-0 בנקודה x_0.

פולינומים ופונקציות טריגונמטריות הן רציפות בתחום ההגדרה. הרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

הוכחה: כי לכל סדרה $x_n \to x_0$ יהיה $y_n = f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. אזי $y_n \to y_0$ ולכן $g(y_n) \to g(y_0)$. ■

2.5.1 מיון נקודות אי רציפות

1. אי רציפות <u>סליקה</u>: נקודה x_0 תקרא נקודת אי רציפות סליקה אם f לא רציפה ב-x_0 אבל קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
2. אי רציפות ממין ראשון - קיימים ושונים $f(x_0-0) \ne f(x_0+0)$.
3. אי רציפות ממין שני - אחד או יותר מהגבולות החד צדדיים לא קיים.

2.5.2 תנאים לאי-רציפות

משפט 2.15 תהי $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) ב-(a,b) אזי קיים $f(b-0)$ וקיים $f(a+0)$ (יכולים להיות גם לא סופיים)

הוכחה: נניח למשל f עולה (במובן הרחב). אם f חסומה מלעיל, אזי קיים מספר M כך ש-$f(x) \le M$ לכל x, נגדיר את $M_0 = \sup_x f(x)$, אזי לכל $M_0 - \varepsilon < M_0$, ואז אם $x_0 < x < b$ כלומר, $|x - x_0| < \delta$, אזי $M_0 - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le M$ אזי מהגדרת הגבול נובע

$$M_0 = \lim_{x\to b-\delta} f(x)$$

. ■

מסקנה 2.16 הוכחנו גם שאם f עולה, אזי

$$f(b-0) = \sup_{a<x<b} f(x)$$

ובאופן דומה,

$$f(a+0) = \inf_{a<x<b} f(x)$$

במשפט הנ"ל, אם f לא חסומה מלעיל, אזי לכל n טבעי יש נקודה $x_n < b$ כך ש-$f(x_n) > n$, ואז לכל $x_n < x$ יהיה $f(x) > n$. כלומר, $\lim_{x\to b^-} = \pm\infty$.

מסקנה 2.17 אם f מונוטונית בקטע (a,b) אז בכל נקודה x בקטע, קיימים הגבולות החד צדדיים $f(x+0) \ge f(x-0)$ (ובפרט, אם f עולה אז $f(x-0) = \sup_{x'<x} f(x') \le f(x)$, ו- $\inf_{x<x'} f(x') = f(x+0) \ge f(x)$).

משפט 2.18 תהי $f(x) > 0$ ו-f רציפה ב-x_0, אזי יש סיבה של x_0 שבה $f(x) > 0$.

הוכחה: אזי לכל $\varepsilon > 0$ יש סביבה δ שבה $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$, ובפרט אם נקח $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ אז $f(x_0) < f(x)$ ■

מסקנה 2.19 אם $g(x_0) < f(x_0)$ ושתיהן רציפות ב-x_0 אזי יש סביבה של x_0 שבה $f(x) > g(x)$.

הוכחה: נקח $h(x) = f(x) - g(x)$ - רציפה ו $h(x_0) > 0$. אזי $h(x)$ חיובית בסביבה של x_0. ■

משפט 2.20 תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ונניח $f(a) \cdot f(b) < 0$. אזי קיימת נקודה $a < c < b$ שבה $f(c) = 0$.

הוכחה: נחצה את הקטע $[a, b]$ לשניים, ונבחר את אחד החצאים $[a_1, b_1]$ ששם $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ (אם $= 0$, גמרנו), וכך נמשיך, ונחלק כל קטע לשניים ונקבל סדרת קטעים, $[a_n, b_n](n = 1, 2, 3, ...)$.

1) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ (אם $= 0$ גמרנו!)

2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

3) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, לפי הלמה של קנטור, קיימם $a < c < b$ שבה $\forall n$ $c \in [a_n, b_n]$, $a_n, b_n \to c$.

$f(x)^2 \to f(a_n)f(b_n) < 0$, $f^2(x) \leq 0$ ולכן $f(x) = 0$. ■

משפט 2.21 תהי $y = f(x)$ רציפה בקטע $[0, 1]$ ומעתיקה את הקטע על עצמו אזי יש נקודת שבת x_0, $f(x_0) = x$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - x \\ h(0) &= f(0) - 0 \geq 0 \\ h(1) &= f(1) - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.22 אם $g(a) \leq f(a)$ ו-$f(b) \leq g(b)$ ו-f ו-g רציפות בקטע $[a, b]$ אז יש c בקטע שבה $f(c) = g(c)$.

הוכחה: $h(x) = f(x) - g(x)$. ■

מסקנה 2.23 אם f רציפה בקטע $[a, b]$, ואם טווח f מכיל קטע $[m, M]$ אזי לכל $m \leq \gamma \leq M$ יש $c \in [a, b]$ שבה $f(c) = \gamma$.

הוכחה: $h(x) = f(x) - \gamma$, אזי h רציפה ו-m, M נמצאים בטווח. אזי יש נקודה x_1 שבה $m = f(x_1)$ ונקודה x_1 שבה $M = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} h(x_1) &= f(x_1) - \gamma = m - \gamma \leq 0 \\ h(x_2) &= f(x_2) - \gamma = M - \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

אזי יש $x_1 \leq C \leq x_2$ שבה $h(c) = 0$ לכן $f(x) = \gamma$. ■

מסקנה 2.24 אם f רציפה ב-$[a, b]$ ואם $m = f(x_1)$ ו $M = f(x_2)$ אזי כל ערך γ בין m ו-M מתקבל.

משפט 2.25 תהי $f(x)$ מונוטונית בקטע $[a, b]$. אזי $f(x)$ רציפה בקטע אם ורק אם טווח f הוא קטע.

מסקנה 2.26 אם f רציפה בקטע x אזי טווח f הוא קטע y. בפרט, אם $x = [a, b]$ סגור, אזי טווח f הוא קטע סגור $y = [m, M]$, כאשר $m = \inf_x f(x)$, $M = \sup_x f(x)$.

משפט 2.27 תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע (סגור, פתוח או חצי סגור, סופי או אינסופי) ומונוטונית אזי f רציפה $\Leftrightarrow$טווח f הוא קטע.

הוכחה: $\Leftarrow$ זו המסקנה

$\Rightarrow$נניח טווח f הוא קטע, ונניח f לא רציפה בנקודה x_0 , נניח למשל x_0 נקודה פנימית לקטע. היותר ו-f מונוטונית, נניח למשל עולה, קיים גבול מימין $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(x_0+0)$, וקיים גבול משמאל $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = f(x-0)$, היות ו-$f$ לא רציפה ב-x_0, יהיה $f(x_0-0) < f(x_0+0)$. $f(x_0)$ נמצא בין שני ערכים אלה. נניח למשל $f(x_0) > f(x_0-0)$.

נקח אם כן מספר $f(x_0-0) < \gamma < f(x_0)$. הערך γ לא יכול להתקבל מימין ל-x_0, ולא יכול להתקבל להיות $f(x_0)$, ולא יכול להתקבל משמאל ל-x_0 (כי שם $f(x) \leq f(x_0-0)$) ולכן טווח הפונקציה לא מכיל את הרווח $\Big(f(x_0-0), f(x_0)\Big)$, וזו סתירה כי טווח f הוא קטע.

במקרה ש-$x_0 = a$, כלומר, f לא רציפה בקצה הקטע השמאלי, אזי $f(x) < f(a+0)$, אז דיון דומה מראה שטווח f לא מכיל את $\Big(f(a), f(a+0)\Big)$. ■

מסקנה 2.28 <u>מסקנה:</u> אם f מונוטונית ממש בקטע, וגם רציפה בקטע X, ויהי y טווח $f(x)$, אזי קיימת הפונקציה ההפוכה $x = f^{-1}(y)$, והיא רציפה ומונוטונית, ומעתיקה את y על X.

הוכחה: ברור ש-$f^{-1}(y)$ מונוטונית, ומעתיקה את y על X, והיות ו-X קטע ולפי המשפט הנ"ל f^{-1} רציפה. ■

<u>דוגמאות:</u> $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, עולה ממש ורציפה, ולכן קיימת ורציפה ועולה, הפונקציה $x = \arcsin y$, $-1 \leq y \leq 1$.

ובאופן דומה, כל פונקציה טריגונומטרית הפוכה , $\arccos x, \dots$, בתנאי שהיא מוגדרת.

$$y = a_x, 0 < a \neq 1, 0 \leq x \leq \infty \Rightarrow$$

ולכן קיימת גם הפונקציה ההפוכה, $x = \log_a y$ והיא רציפה ומונוטונית.

$$y = e^x, x = \ln y$$

2.6 רציפות במידה שווה

הגדרה 2.29 תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע I. f תקרא רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ כך שלכל זוג נקודות $x_1, x_2 \in I$ שמקיימות $|x_1 - x_2| < \delta$, יהיה $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

רציפות במידה שווה גוררת רציפות רגילה בכל נקודה.

- דוגמה שההפך לא נכון: $y = \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$ רציפה ב-$(0,1]$ אך לא במידה שווה. כשמקרבים את x_1, x_2 לאפס, אזי $|f(x) - f(x_2)|$ גדל לאינסוף!
- $y = x^2$ רציפה ב-$[0,\infty)$ אבל לא במידה שווה!
  - נניח שכן, ז"א $y = x^2$ רציפה במ"ש על $[0,\infty)$. אזי לכל ε קיים $\delta(\varepsilon)$, כך שלכל $|x_1 - x_2| < \delta$ יהיה $\left|x_1^2 - x_2^2\right| < \varepsilon$. אבל

$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| < \delta \cdot (x_1 + x_2) = \delta(\varepsilon)(x_1 + x_2) \not< \varepsilon$$

הערה 2.30 $y = f(x)$ המוגדרת בקטע X לא רציפה במידה שווה ב-X אם ורק אם קיים $\varepsilon_0 > 0$ שעבורו לכל $\delta > 0$, קיימים x_1, x_2 שמקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$, ו-$\varepsilon_0 \leq |f(x_1) - f(x_2)|$.

משפט 2.31 אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, אז $f(x)$ רציפה במידה שווה בקטע.

הוכחה: נניח $f(x)$ לא רציפה במידה שווה בקטע $[a,b]$, אזי מתקיימת ההערה קודמת. נבחר $\delta=\frac{1}{n}(n=1,2,\dots)$ אז לכל n קיימים x_n ו-x'_n כך ש-$|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}$.

לסדרה $x_n\in[a,b]$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת לנקודה $a\le x\le b$.$x_{n_k}\to x$, ומרציפות f, $f(x_{n_k})\to f(x)$.

לסדרה $\left\{x'_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ יש גם תת סדרה מתכנסת. $\left|x'_{n_k}-x_{n_k}\right|<\frac{1}{n_k}\to 0$ לכן $x'_{n_k}\to x$.

ומרציפות f, $f(x'_{n_k})\to f(x)$. אבל $\varepsilon_0\le\left|f(x'_{n_k})-f(x_{n_k})\right|\to|f(x)-x(f)|=0$, לכן $\varepsilon_0\le 0$, וזו סתירה! ■

הגדרה 2.32 תהי A קבוצת מספרים על הישר הממשי. תהי Σ קבוצת קטעים פתוחים, נאמר כי Σ מכסה את A אם

$$A\subset\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma$$

כלומר, לכל $x\in A$, קיים $\sigma\in\Sigma$ שעבורו $x\in\sigma$.

<u>דוגמא:</u> $A=(0,1)$.$\sigma_n=(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})n=1,2,3\dots$, $\Sigma=\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$(0,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n$$

אבל לא קיים כיסוי של $(0,1)$ ע"י מספר סופי של הקטעים σ_n.

למה 2.33 <u>הלמה של היינה-בורל</u>: אם A קטע סופי סגור $A=[a,b]$, ואם Σ הוא אוסף קטעים פתוחים שמכסה את הקטע $[a,b]$ אז ניתן להוצא תת-כיסוי סופי. כלומר קיימים $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n\in\Sigma$ כך ש-$[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i$.

הוכחה: נניח שלמה שגויה. אין תת כיסוי סופי. נחצה את $[a,b]$ לשני חצאים שווים, אז לפחות לאחד משני החצאים אין כיסוי סופי. נחצה קטע זה, $[a_1,b_1]$ לשניים ונמשיך. נקבל סדרה $I_n=[a_n,b_n]$

$$\begin{aligned} I_n &\subset I_{n+1}\\ |I_n| &= \frac{b-a}{2^n}\end{aligned}$$

אזי מהלמה של קנטור קיימת $c\in[a_n,b_n]$ לכל $n=1,2,\dots$.

$a\le c\le b$ ולכן מכוסה על ידי σ מסויים. אז היות ו-$c\in[a_n,b_n]$, קיים n כך ש-$[a_n,b_n]\subset\sigma$. וזו סתירה לכך שלא ניתן לכסות $[a_n,b_n]$ אם מספר סופי של קטעים של Σ-. ■

הערה 2.34 המשפט לא הבכרח נכון עם Σ מכילה קטעים שאינם פתוחים.

$$[0,1]\subset[-1,0]\cup[1,2]\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$$

משפט 2.35 <u>משפט וירשטראס הראשון</u>

למה 2.36 פונקציה שהיא רציפה בקטע סגור וסופי $[a,b]$ היא חסומה בקטע.

הוכחה: נניח שהיא אינה חסומה מלעיל. אזי לכל n טבעי קיים נקודה $x_n\in[a,b]$ שבה $f(x_n)>n$.$\{x_n\}$ היא סידה חסומה ולכן יש לה תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת לגבול $c\in[a,b]$, ומרציפות f ב-c, יהיה $f(x_{n_k})\to f(c)(n_k<)$, לכן גם $f(x_{n_k})\to\infty$ ולכן $f(c)=\infty$ וזו סתירה. ■

משפט 2.37 <u>משפט וירשטראס השני</u>

למה 2.38 פונקציה שהיא רציפה בקטע סגור מקבלת בקטע את המקסימום והמינימום.

הוכחה: הפונקציה חסומה מלעיל ומלרע, נסמן $M = \sup_x f(x)$. לכל n טבעי, $M - \frac{1}{n} < M$ ולכן אינו חסם מלעיל, כלומר, יש נקודה $x_n \in [a,b]$ כך ש-$(M \geq) f(x_n) > M - \frac{1}{n}$.

לסדרה $\{x_n\}$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ מתכנסת לנקודה $c \in [a,b]$, מרציפות f ב-c, $f(x_{n_k}) \to f(c)$, אבל

$$M \geq f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n} \to M$$

ולכן, מיחידות הגבול, $f(c) = M$. M נקרא מקסימים. ■

הערה 2.39 מהלמה של היינה-בורל אפשר לקבל הוכחה למשפט וירשראס הראשון.

הוכחה: תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $\varepsilon = 1$. מרציפות f אז לכל $a \leq x \leq b$, קיים $0 < \delta = \delta(\varepsilon, x)$ כך שלכל $|x' - x| < \delta$, יהיה $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{a \in [a,b]} (x - \delta(\varepsilon, x), x + \delta(\varepsilon, x))$$

קיבלנו אינסופי של $[a,b]$, לפי היינה-בורל, יש תת-כיסוי סיפי. כלומרף קיימת $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך ש:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - \delta(\varepsilon_i x_i), x_i + \delta(\varepsilon_i x_i))$$

נסמן $\delta_i = \delta(\varepsilon_i x_i)$.

תהי $x \in [a,b]$ כלשהו, ולכן קיים i כך ש$x \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$ כומר, $|x - x_i| < \delta_i$ ולכן $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon = 1$.

$1 + f(x_i) > f(x) > 1 - f(x_i)$

ולכן $1 + \max_i f(x_i) > f(x) > 1 - \max_i f(x_i)$. x חסום על ידי גבולות סופיים ולכן הוא חסום. ■

2.7 הנגזרת

הגדרה 2.40 תהי $y = f(x)$ שמוגדרת בסביבה של x_0 ויהי $\Delta x \neq 0$. נסמן $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha$$

α נקרא השיפוע והוא הזווית של המיתר $(x_0, f(x_0)) - (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ עם ציר ה-x החיובי.

אם ניתן עתה ל-$\Delta x \to 0$ אזי השיפוע α שואף לשיפוע המשיק בנקודה (x_0, y_0), אם קיים משיק כזה.

אם קיים גבול

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

נסמן אותו ב-$f'(x_0)$ ונאמר ש-$f(x)$ גזירה בנקודה x_0. $f'(x_0)$ יקרא הנגזרת של $f(x)$ ב-x_0.

לעיתים נסמן $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{x_0}$, או, אם ברור, על ידי $\frac{dy}{dx}$, או על ידי $y'(x_0)$ או ע"י y'.

- $(\sin x)' = \cos x$
  -

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(-\sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right) = \\ &= -0\cdot\frac{1-\cos h}{h}+\cos x\cdot 1=\cos x\end{aligned}$$

- $(\cos x)' = -\sin x$
  -

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\quad\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} = \\ = \quad &\lim_{h\to 0}\quad\left(\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= \quad \sin x\end{aligned}$$

- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
  -

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} &= \frac{\tan x+\tan h-\tan x(1-\tan x\tan h)}{h(1-\tan x\tan h)} \\ &= \frac{\tan h}{h}\cdot\frac{(1+\tan^2 x)}{1-\tan x\tan h} = \\ &= 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

- $(0<a\neq 1)$,$(a^x)=a^x\ln a$
  -

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$$

  - **נוכיח:** $\frac{a^h-1}{h}\to\ln a$.
  - **נסמן** $e^t=a^h$, **כלומר,** $t=\ln(a^h)=h\ln a$. **יש לשים לב כי** $t\to 0\Leftrightarrow h\to 0$.
  -

$$\frac{a^h-1}{h}=\frac{e^t-1}{t}\ln a$$

  - **נסמן** $e^t-1=\frac{1}{r}$. **נשים לב ש** $t\to 0\Leftrightarrow|r|\to\infty$.
  - $1+\frac{1}{r}=e^t$. $t=\ln(1+\frac{1}{r})$.

–

$$\begin{aligned}\frac{e^t-1}{t} &= \frac{\frac{1}{r}}{\ln(1+\frac{1}{r})} = \frac{1}{r\ln(1+\frac{1}{r})} = \\ &= \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{r})^r} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{\ln e} = 1\end{aligned}$$

– $\frac{e^t-1}{t} = 1$

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(a < a \neq 1)$.

–

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

– נסמן ב-t את המונה, $t = \log_a(x+h)-\log_a x$.

* $x\cdot a^t = a^t\cdot a^{\log_a x} = a^{t+\log_a x} = a^{\log_a(x+h)} = x+h$.
* $h = x(a^t-1)$, **שימו לב:** $h\to 0 \Rightarrow t\to 0$.

–

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{t}{x(a^t-1)} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{x\ln a}$$

2.7.2 כללי הנגזרת

יהיו $f(x), g(x)$ גזירות בנקודה x.

1. $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$
2. $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ אם $g(x)\neq 0$.

הוכחות:

1.

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)+g(x)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\right] = \\ &= \left[\lim_{h\to 0}(f(x+h))\right]g'(x)+g(x)f'(x)\end{aligned}$$

טענה: היות ו-$f(x)$ גזירה בנקודה x, אז $f(x)$ רציפה בנקודה x.

הוכחת הטענה: (עם גבול על הכל...)

$$f(x+h)-f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h=f'(x)\cdot h\to 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\right) &= f(x)\\ \left[\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\right)\right]g'(x)+g(x)f'(x) &= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\end{aligned}$$

4. קודם נמצא נגזרת $\frac{1}{g(x)}$ ומשתמשים ב(3)..

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0}-\frac{\frac{f(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)}\\ &= \frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}\end{aligned}$$

2.7.3 נגזרת של פונקציה מורכבת:

משפט 2.41 תהי $y=f(x)$ גזירה ב-x_0, ותהי $z=g(y)$ גזירה בנקדוה $y_0=f(x_0)$.
אזי הפונקציה $z=g(y)=g\left(f(x)\right)=\left(g\circ f\right)(x)$ והיא גזירה בנקודה x_0, מתקיים:

$$z'(x_0)=g'(f(x_0)f'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$$

ניתן לזכור זאת באופן הבא:

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

הוכחה: ניתן ל-x_0 תוספת קטנה, Δx, אזי y מקבל תוספת

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\\ &= f(x_0+\Delta x)+y_0\\ f(x_0+\Delta x) &= y_0+\Delta y\end{aligned}$$

z מקבל תוספת

$$\begin{aligned}\Delta z &= g(y_0-\Delta y)-g(y_0)\\ \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\\ &= g'(y_0)\cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

יש בעיה בהוכחה: אם $\Delta y = 0$ ו-$\Delta x \neq 0$!!

תיקון: אם פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_0, אזי אם x_0 מקבל תוספת Δx יהיה

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$$

כאשר $\alpha(\Delta x)$ היא פונקציה של Δx ששואפת לאפס כאשר $\Delta x \to 0$.

נגדיר

$$\begin{aligned}
\alpha(\Delta x) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \\
\Delta x \to 0 &\Rightarrow \alpha \to 0 \\
\\
f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)
\end{aligned}$$

נסתכל שוב על $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ בצורה נכונה.

$$\begin{aligned}
\Delta z &= g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = \\
&= \Delta y \cdot g'(y_0) + \Delta y \cdot \alpha(\Delta y) \\
\frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} g'(y_0) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \alpha(\Delta y) = \\
&= f'(x_0) g'(y_0) + f'(x_0) \cdot 0 = \\
&= f'(x_0) g'(y_0)
\end{aligned}$$

■

2.7.4 נגזרות נוספות

- $(x^a)' = ax^{a-1}$
  -

$$\begin{aligned}
y &= x^a \\
\ln y &= a \ln x \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{a}{x} \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dy}(\ln y) \cdot \frac{dy}{dx} = \\
&= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \\
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{x} \\
&\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} \cdot y = \frac{a}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}
\end{aligned}$$

  - במידה ו-$x < 0$, נקח $-(-x)^n$ ע"מ ש-$\ln x$ יהיה מוגדר.
- $(x^x)'$
  - נקח $y = x \ln x$. צ"ל $\frac{d}{dx} e^y$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(e^y) &= \frac{d}{dy}(e^y) \frac{dy}{dx} = \\
&= e^y \cdot \frac{dy}{dx} = x^x \frac{dy}{dx} = \\
&= x^x \cdot (\ln x + 1)
\end{aligned}$$

- $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$
- הוכחה נוספת: יהיה $y = x^x$.

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \ln x \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \ln x + 1 \\
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \ln x + 1 \\
\frac{dy}{dx} &= y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)
\end{aligned}$$

- יהיו $u = u(x)$, $v = v(x)$ גזירות ב-x. לחשב $(u^v)'$
  - נסמן $y = u^v$.

$$\begin{aligned}
\ln y &= v \ln u \\
\frac{y'}{y} &= v' \ln u + v\,(\ln u)' = \\
&= v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \\
y' &= u^v \left(v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right)
\end{aligned}$$

  - $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right)$

<u>תרגיל:</u>

גזור את $x^{(x^x)}$.

2.7.5 נגזרת הפונקציה ההפוכה

[1]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\begin{aligned}
y &= \sin x \\
x &= \arcsin y \\
\frac{d}{dy} \arcsin y &= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \\
\cos x &= \sqrt{\sin^2 x - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= a^x \\
x &= \log_a y \\
x' &= \frac{1}{y \ln a}
\end{aligned}$$

[1] $y = f(x)$,$x = f^{-1}(y)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\arcsin y &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\\ \frac{d}{dy}\log_a y &= \frac{1}{y\ln a}\end{aligned}$$

משפט 2.42 תהי $y=f(x)$ גזירה בנקודה x_0, ויהי $y_0=f(x_0)$. נניח כי $f'(x_0)\neq 0$. אם קיימת הפונקציה ההפוכה $x=\varphi(y)$ ואם φ רציפה ב-y_0, אזי φ גזירה ב-y_0 ו-$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'f(x_0)}$.

כלומר:

$$\frac{dx}{dy}\mid_{y_0}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}\mid_{x_0}}$$

הוכחה: תהי $\Delta x\neq 0$ תוספת קטנה, נסמן

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\ &= f(x_0+\Delta x)-y_0\end{aligned}$$

כלומר, .

$$f(x_0)+\Delta x)=y+\Delta y$$

נפעיל את הפונקציה ההפוכה ל $f(x)$:

$$\begin{aligned}x_0+\Delta x &= \varphi\left(y_0+\Delta y\right)\\ \Delta x &= \varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)\end{aligned}$$

כאשר $\Delta x\to 0$ יהיה גם $\Delta y\to 0$, כי f רציפה ב-x_0.

כאשר $\Delta y\to 0$ יהיה גם $\Delta x\to 0$כי φ רציפה ב-y_0. כלומר:

$$\begin{aligned}\Delta x\to 0 &\Leftrightarrow \Delta y\to 0\\ \Delta x=0 &\Leftrightarrow \Delta y=0\\ \Delta x\neq 0 &\Leftrightarrow \Delta y\neq 0\end{aligned}$$

נסתכל על

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)}{\Delta y} &= \frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}=\\ &= \frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}\end{aligned}$$

נשאיף את $\Delta y\to 0$ אזי $\Delta x\to 0$ אזי צד ימין שואף ל-$\frac{1}{f'(x_0)}$ ולכן קיים הגבול, כלומר - הנגזרת של φ בנקודה y_0, והשוויון

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

■

הערה 2.43 אם f מונוטונית ממש ורציפה בסביבת x_0 אזי ממשפט קודם, תהיה $\varphi(y)$ רציפה ומונוטנית ממש ב-y_0.

2.7.6 נגזרות מסדר כלשהו

אם f גזירה מספר פעמים בנקודה x_0 אזי נגדיר באינדוקציה

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f(^{(n-1)}(x)\right)'$$

כאשר $f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f'''$ וכו.

באינדוקציה:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)^{(n)} &= f^{(n)} \pm g^{(n)} \\
(f(x) \cdot g(x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \\
(cf(x))^{(n)} &= c\,(f(x))^{(n)} \\
\left(x^2 \sin x\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^k (\sin x)^{n-k} = \\
&= \binom{n}{0} x^2 (\sin x)^{(n)} + \binom{n}{1} \left(x^2\right)' (\sin x)^{(n-1)} \\
(\sin x)^{(k)} &= \begin{cases} k=1 & \cos x \\ k=2 & -\sin x \\ k=3 & -\cos x \\ k=4 & \sin x \\ \vdots & \vdots \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{k}{2} \in \{2n\} & \sin x \\ \frac{k}{2} \notin \{2n\}, k \in \{2n\} & -\sin x \\ \vdots & \vdots \end{cases} (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

2.7.7 דיפרנציאביליות

הגדרה 2.44 נאמר כי פונקציה $f(x)$ שמוגדרת בסביבה של x_0 , היא דיפרנציאבילית ב-x_0, אם קיים מספר A כך ש-

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$$

כאשר Δx הוא בסביבה של-0, A קבוע, ו $0 \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \alpha(\Delta x)$.

מכאן, אם $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

כלומר, $A = f'(x_0)$.

לפני כן, הראנו שגם ההיפך נכון. אם f גזירה ב-x_0 אזי f דיפרנציאבילית.

מסקנה 2.45 f דיפרנציאבילית ב-x_0 אם ורק אם f גזירה ב-x_0.

ניתן לנסח זאת בצורת:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$$

נסמן עתה את Δx על ידי dx.

$$dx = \Delta x$$

ונסמן

$$\begin{aligned} dy &= f'(x_0)\cdot dx = \frac{dy}{dx}\cdot dx \\ \Delta y &= \frac{dy}{dx}\cdot dx + \alpha(dx)\cdot dx \simeq \frac{dy}{dx}\cdot dx \\ \Delta y &\simeq dy = f'(x_0)dx \end{aligned}$$

זו נוסחה שנותנת קירוב (מסדר ראשון) לתוספת Δy כאשר dx קטן מאוד.

דוגמא לשימוש:

חשב בקירוב את $\ln 1.1$, תהי $y = \ln x$, $x_0 = 1, y_0 = \ln 1 = 0, dx = 0.1$ יש לחשב את dy.

$$\begin{aligned} dy &= f'(x_0)dx = 1\cdot dx = 0.1 \\ \ln 1.1 - \ln 1 &= \Delta y \simeq dy = 0.1 \\ \ln 1.1 &\simeq 0.1 \end{aligned}$$

דוגמא נוספת:$y = \sin x$. נחשב בקירוב $\sin 46^o = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) - \sin\frac{\pi}{4} &= \Delta y \simeq \frac{\pi}{180\sqrt{2}} \\ \sin 46 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{190}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{180\sqrt{2}} \end{aligned}$$

חישוב $(2.20)^{\frac{1}{3}}$.

ידוע כי $(1.3)^3 = 2.197$

$$\begin{aligned} (2.20)^{1/3} &= \left(1.3+\frac{3}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.3\left(1+\frac{3}{2197}\right)^{\frac{1}{3}} \\ f'(1) = 1 \qquad & f'(1) = \frac{1}{3}, \\ dx = \frac{3}{2197} \qquad & \Delta y \simeq dy = f'(1)\cdot dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2197} = \frac{1}{2197} \\ \Delta y = \left(1+\frac{3}{2197}\right)^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}} \qquad & 1+\frac{1}{2197} \end{aligned}$$

2.7.8 פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית.

לדוגמא, מעגל נתון על ידי:

$$0 \le 0 \le 2\pi, \quad y = \sin t, \quad x = \cos t$$

משפט 2.46 (הנגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית)
תהי $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ בקטע $\alpha \le t \le \beta$.
נניח $\varphi(t)$ מונוטונית ממש בקטע, והיא רציפה.
אזי קיימת הפונקציה ההפוכה ויא רציפה, $t=\varphi^{-1}(x)$ ואז

$$y=\psi(t)=\psi\cdot\varphi^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)=\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\\
&= \frac{\ddot\psi(t)\dot\varphi(t)-\dot\psi(t)\ddot\varphi(t)}{(\dot\varphi(t))\,\dot\varphi(t)}=\frac{\ddot\psi\dot\phi-\dot\psi\ddot\varphi}{\dot\varphi^3}
\end{aligned}$$

2.7.9 משפטים יסודיים (פרמה, רול, לגרנז',קושי)

משפט 2.47 <u>משפט פרמה</u>
תהי $f(x)$ גזירה ב-x_0, אם x_0 היא נקודת אקסטרמום מקומית, אזי $f'(x_0)=0$.

הוכחה: נניח x_0 נקודת מקסימום מקומי, אזי עבור $|\Delta x|$ קטן מספיק יהיה $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$ ולכן

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} &\le 0 \quad (\Delta x>0)\\
&\ge 0 \quad (\Delta x<0)\\
f'(x_0^+)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} &\le 0\\
f'(x_0^-)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} &\ge 0\\
&\Downarrow\\
f'(x_0) &= 0
\end{aligned}$$

■

דוגמא: $f(x)=x^3-3x, -4\le x\le 4$ יש לחשב את המקסימום.

$$\begin{aligned}
f(4) &= 64-12=52\\
f(-4) &= -64+12=-52\\
f'(x) &= 3x^2-3\\
&\overset{=}{?}\ 0\\
x &= \pm1\\
f(1) &= -2\\
f(-1) &= +2
\end{aligned}$$

משפט 2.48 <u>משפט רול</u>

תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה ברווח הפתוח (a,b), אז אם $f(a)=f(b)$, אזי יש $a<c<b$ שבה $f'(c)=0$.

הוכחה: f רציפה ולכן מקבלת מקסימום M ומינימום m בקטע $[a,b]$.

שני מקרים:

$m=M$, אזי $f(x)=m=M$ לכל x. ולכן הנגזרת $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$.

$m<M$ **הוכחה:** אזי M או m מתקבלים בנקודה פנימית c.

למשל, M בנקודה פנימית c. ואז לפי פרמה, $f'(x)=0$. ■

■

משפט 2.49 <u>משפט לגרנז'</u>

תהע $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה ברווח הפתוח (a,b). אזי קיימת $a<c<b$ שבה

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

הוכחה: נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)-f(a)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) \\ F(b) &= F(a)=0 \end{aligned}$$

$F(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b), ולכן לפי רול יש $a<c<b$ שבה $F'(c)=0$. ■

הערה 2.50 נסמן במשפט לגרנז' $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$ אזי c ניתינת להכתב בצורה $c=x_0+\theta\Delta x$, ו $0<\theta<1$ ואז המסקנה היא ש:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

השווה להגדרת הדיפרניצאביליות (?)

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x)+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

<u>דוגמא:</u>

$$f(x)=\ln x \qquad x_0=1$$

$$\ln(1+\Delta x) = \ln 1+\frac{\Delta x}{x_0+\theta\Delta x}=\frac{\Delta x}{1+\theta\Delta x}$$

$$\frac{1}{1+\Delta x}<\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}<1$$

משפט 2.51 <u>משפט קושי</u>

תהינה $f(x)$ ו$g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות ברווח (a,b). נניח $g(b) \neq g(a)$,$g'(x) \neq 0 \in (a,b)$. אזי יש נקודה $a < c < b$ שבה

$$\begin{aligned} \frac{f'(c)}{g'(c)} &= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \\ f'(c) &= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) \end{aligned}$$

הוכחה: נגדיר

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)(g(x)-g(a)) \\ F(a) &= F(b) = 0 \end{aligned}$$

$F(x)$ רציפה ב-$[a,b]$, גזירה ב-(a,b) ולפי רול, יש $a < c < b$ שבה $F'(c) = 0$. ■

משפט 2.52 <u>משפט דרבו</u>

אם $f(x)$ גזירה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי $f'(x)$ מקבלת כל ערך הנמצא בין $f'_+(a)$ ו-$f'_-(b)$.

הוכחה: נניח למשל $f'_+(b) < f'_-(b)$ ויהי $f'_+(b) < \mu < f'_-(b)$ כלשהו. צ"ל להוכיח שקיימת נקודה $a < c < b$ שבה $f'(c) = \mu$.

נגדיר פונקציה

$$F(x) = f(x) - \mu x$$

אזי $F(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$ ולכן רציפה בקטע הסגור, אזי יש נקודה c שבה $F(c)$ מקבלת מינמום. יש שני מקרים:

$$(1) \quad a < c < b \qquad\qquad (1) \quad c = b \text{ or } c = a$$

1. אם $a < c < b$ אזי לפי פרמה $F'(c) = 0 = f'(c) - \mu$
2. (א) נניח למשל $c = a$.

$$\begin{aligned} (\Delta x > 0)\ \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x} &= \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - \mu \\ &\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'_+(a) - \mu < 0 \end{aligned}$$

לכן קיים $\delta > 0$ קטן כך שאם $0 < \Delta x < \delta$ יהיה $\frac{F(a+\Delta x)-()}{\Delta x} < 0$. וכך $F(a+\Delta x) < F(a)$, סתירה לכך ש-a נקודת מינימום של $F(x)$.

(ב) במקרה השני, אם $c = b$, אזי עבור $\Delta x > 0$ קטן קיים

$$\begin{aligned} \frac{F(b-\Delta x) - F(b)}{-\Delta x} &= \frac{f(b-\Delta x) - f(b)}{-\Delta x} - \mu \\ &\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'_-(b) - \mu \end{aligned}$$

ולכן קיים $\delta' > 0$ שעבורו לכל $0 < \Delta x < \delta'$ יהיה

$$\begin{aligned} \frac{F(b-\Delta x)-F(b)}{-\Delta x} &> 0 \\ F(b-\Delta x)-F(b) &< 0 \\ F(b-\Delta x) &< F(b) \end{aligned}$$

לכן b לא נקודת מינימום, וזו סתירה.

■

משפט 2.53 תהי $f(x)$ רציפה בסביבת x_0 וגזירה בסביבה, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. אם קיים הגבול

$$\ell = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

אזי $f'(x_0)$ קיים ושווה ל-ℓ.

<u>הערה:</u> המשפט נכון גם לגבולות חד צדדים ל-x_0.

הוכחה:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

נשתמש במשפט לגרנז', שאומר:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} &= f'(x_0+\theta\Delta x) \\ &\xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \begin{cases} f'_+(x_0) & \Delta x>0 \\ f'_-(x_0) & \Delta x<0 \end{cases} \end{aligned}$$

ולכן קיים הגבול ונקבל $f'(x_0)=\ell$. ■

משפט 2.54 תהי $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$ אזי אם x_0 נקודת אי רציפות של $f'(x)$ אז לפחות אחד הגבולות החד צדדים

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f'(x) \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f'(x)$$

לא קיים!

כלומר, נקודות אי רציפות של $f'(x)$ הן תמיד מסוג שני.

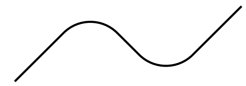
<u>מסקנה:</u> לא קיימת פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)=[x]$ כי נקודות אי הרציפות של $[x]$ הן מסוג ראשון.

הוכחה: כי אם היו קיימים שני הגבולות הנ"ל (של המשפט) אזי

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f'(x) \\ f'(x_0) &= f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f'(x) \end{aligned}$$

לכן x_0 איננה נקודת אי רציפות של $f'(x_0)$. ■

2.8 פונקציות קמורות[2]



הגדרה: $f(x)$קמורה בקטע $[a,b]$, פרושו שלכל שתי נקודות $a \le x_1 \le x_2 \le b$ יהיה

$$f\left((1-\theta)x_1+\theta x_2\right) \le (1-\theta)f(x_1)+\theta f(x_2) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

הגדרה 2.55 f קעורה אם אי השוויון הנ"ל מתהפך.

טענה 2.56 אם $f(x)$ קמורה בקטע אז בכל נקודה פנימית x_0 בקטע יש נגזרת מימין ומשמאל ל-x_0.

הוכחה: יהיה $\Delta x > 0$ אזי לכל $0 < t < 1$ אזי אם נקח $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$ ונסתכל ב:

$$\begin{array}{rcl} (1-t)x_1+tx_2 & = & (1-t)x_0+t(x_0+\Delta x) = \\ & = & x_0+t\Delta x \end{array}$$

ואז הגדרת הקמירות מקבלת את הצורה:

$$\begin{array}{rcl} f(x_0+t\Delta x) & \le & (1-t)f(x_0)+t\cdot f(x_0+\Delta x) \\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0) & \ge & \dfrac{f(x_0+\Delta x)-(1-t)f(x_0)}{t}-f(x_0) = \\ & = & \dfrac{f(x_0-t\Delta x)-f(x_0)}{t} \ge \\ & & \dfrac{f(x_0-t\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x\cdot t} \end{array}$$

נסמן

$$F(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

קיבלנו כי $F(h)\downarrow$ עבור $h>0$.

אם $0<h_1<h_2$ אזי $F(h_2)>F(h_1)$ ולכן קיים הגבול

$$\begin{array}{rcl} F_+(0) & = & \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F(h) = \\ & = & f'_+(x_0) \end{array}$$

קיבלנו גם כי $F(h)\ge F_+(0)$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge f'_+(x_0)$$

[2] החלק הימני של הגרף קמור והשמאלי קעור.

לכל $h > 0$ מספיק קטן.

כלומר, אם $x < y$ כלשהו ו-f קמורה אזי

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'_+(x)$$

באופן דומה

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y)$$

ולכן לכל פונקציה קמורה

$$f'_+ \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y)$$

■

מסקנה 2.57 בפרט, אם f'' קיימת בקטע וגם f קמורה אזי $f''(x) \geq 0$ לכל x בקטע. כי יש לנו בכל זוג נקודות $x < y$ $f'(x) \leq f'(y)$ ואז

$$\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} \geq 0$$

נשאיף אתה $y \to x$ כאשר $x < y$ ונקבל עתה

$$\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} \geq 0$$

אזי

$$f''(x) = \lim_{y\to x} \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} \geq 0$$

לכל x.

2.9 כלל לופיטל.

לגבולות מהצורה $\infty - \infty, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty$ אין הגדרה פשוטה, ניתן למצוא אותן לעיתים בעזרת כלל לופיטל.

משפט 2.58 תהיינה f,g גזירות בסביבת a פרט אולי ל-a ומקיימות בסביבה הנוקבת של a:

1. $g'(x) \neq 0$ עבור $x \neq a$ בסביבה.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
3. קיים $\ell = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (שיכול להיות סופי או אינסופי)

אזי

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

<u>הערה:</u> המשפט נכון גם לגבולות חד צדדים.

הוכחה: היות ו-$x=a$ נקודה שבה g, f אלי לא מוגדרות, נגדיר אז מחדש

$$f(a)=g(a)=0$$

אזי עכשיו g, f רציפות.

תהי $h\neq 0$ תוספת "קטנה" לנקודה a, תנאי משפט קושי מתקיימים לגבי g, f, כלומר:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a<\mathbf{c}<a+h)$$

c כמובן תלויב ב-h, ולכן כאשר $h\to 0$, אזי $c\to a$. ■

דוגמאות:

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \to -\frac{1}{3!}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^3}\right)' = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{3x^2}\right)' = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{6x}\right)' = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$\sin x - x \qquad \frac{-x^3}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}\right)' = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

$$\sin x \qquad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$e^x-1 \qquad x$$

$$\frac{e^x-1-x}{x^2} \to \frac{1}{2!}$$

$$\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}}{x^3} = \frac{1}{3!}$$

$$e^x \qquad 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^n}{n!}$$

משפט 2.59 תהיינה g, f גזירות בקטע (a,∞) ומקיימת

1. $g'(x)\neq 0$ בקטע
2. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$ (ℓ יכול להיות גבול סופי או אינסופי)
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

אזי קיים הגבול והשוויון

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

הוכחה: נסמן $t=\frac{1}{x}$, אזי $x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0^+$

נגדיר

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = f(x)$$
$$G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) = g(x)$$

נוכיח כי

$$\frac{F(t)}{G(t)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \ell$$

אבל התנאים על $F(t), G(t)$ הם עתה מתקיימים בסביבה ימנית של 0, וכמובן

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} G(t) = 0$$

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{d}{dt}g(x) = \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)\frac{dx}{dt} = -\frac{g'(x)}{t^2} = -x^2 g'(x) \neq 0 \\ \frac{F'(t)}{G'(t)} &= \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell \end{aligned}$$

■

<u>דוגמה</u>

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\infty} \\ \ln\left(1+\frac{a}{x}\right) &= x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \\ &= \frac{\left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \\ &= \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{a}{1+\frac{a}{x}} \to a \end{aligned}$$

משפט 2.60 תהיינה g, f גזירות בקטע $(a, b]$ ומקיימות:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$
2. $g'(x) \neq 0$ **לכל** $a < x < b$.
3. $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ (ℓ יכול להיות סופי או אינסופי)

אזי קיים הגבול והשוויון

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

הוכחה: נסמן

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

ונניח תחילה כי ℓ הוא מספר סופי. היות ו $g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}\infty$ נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש $g(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$.

יהא $\varepsilon>0$. אזי קיים $\eta>0$ כך שלכל $a<x<a<\eta$ מתקיים

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $x_0=a+\eta$. לפי משפט קושי לכל $a<x<x_0$ קיים $x<c<x_0$ כך ש:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ולכן, לכל $a<x<x_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

אם נביט בתנאי ש-$g(x)\to\infty$ נקבל שקיים $0<\delta<x_0-a$ כך שלכל $a<x<a+\delta$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0)-k\cdot g(x_0)}{g(x)}\right| &< \frac{\varepsilon}{2}\\ 0<1-\frac{g(x_0)}{g(x)} &< 1\end{aligned}$$

נתבונן עתה ב:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\ell=\frac{f(x_0)-k\cdot g(x_0)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\ell\right]$$

מהזהות הנ"ל נובע כי לכל $a<x<x_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|\leq\left|\frac{f(x_0)-k\cdot g(x_0)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\ell\right|$$

לפי הזהויות הנ"ל נקבל שלכל $a<x<a+\delta$ מתקיים

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|<\varepsilon$$

ועל כן

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

■

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1\\ \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

משפט 2.61 תהיינה f,g מוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ ומקיימות

1. $g(a)=f(a)=0$
2. $g'(a)\neq 0$

אזי קיים הגבול והשוויון

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

הוכחה:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{g(x)}{x-a}=g'(a)\neq 0$$

ולכן $\frac{g(x)}{x-a}\neq 0$ (x קרוב ל-a) בקטע $a<x<a+\delta$.

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

■

2.10 נוסחאת טיילור

יהי $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ פולינום.

$$\begin{aligned}
P(0) &= a_0\\
P'(0) &= 0\\
P^{(k)}(0) &= a_k k!\\
a_k &= \frac{P^{(k)}(0)}{k!}(k=0,1,2,\ldots,n)\\
P(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)x^n}{n!}
\end{aligned}$$

זהו פיתוח של טור טיילור סביב האפס - נוסחת מקלורין.

כמו כן, מכאן נקבל פיתוח $P(x)$ סביב נקודה x_0 כלשהו:

$$P(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!}$$

נכניס משתמה חדש h כך ש-$x=x_0+h$ ונסמן:

$$\begin{aligned}
q(h) &= P(x)\\
&= P(x_0+h)=A_nh^n+A_{n-1}h^{n-1}+\ldots+A_1h+A_0\\
A_k &= \frac{q^{(k)}(0)}{k!}\\
P(x) &= q(h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{q^{(k)}h^k}{k!}=\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{q^{(k)}(0)(x-x_0)^k}{k!}
\end{aligned}$$

טענה 2.62

$$q^{(k)}(0) = P^{(k)}(x_0)$$

$$\begin{aligned} q(0) &= P(x_0) \\ q' &= \frac{dq}{dh}\,|_{h=0} = \frac{dP(x)}{dx}\,|_{x=x_0} \cdot \frac{dx}{dh} \\ &= \frac{dP(x)}{dx}\,|_{x=x_0} = P'(x_0) \end{aligned}$$

קיבלנו $q'(h) = P'(x)$ ונקבל

$$q^{(k)}(h) = P^{(k)}(x)\,(k = 0, 1, 2\ldots)$$

משפט 2.63 נוסחת טיילור לפולינום:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x-x_0)^k}{k!} = \\ &= P(x_0) + \frac{P'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{P''(x_0)(x-x_0)}{2!} + \ldots + \frac{P^{(n)}(x-x_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

2.10.1 טור טיילור עבור פונקציה כללית

הרעיון הוא להחליף את $P(x)$ בפונקציה $f(x)$ שגזירה n פעמים בנקודה x_0, ואז נכתוב

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

כאשר

קטנה
הקטן
של

יבר
ר
ום.

$$f(x) - P(x) = R_n(x)$$

טענה 2.64

$$R_n(x) = (x-x_0)\alpha(x)$$

כאשר $0 \xrightarrow[x\to x_0]{} \alpha(x)$.

כלומר,

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

זה מכליל את המקרה $n = 1$ שבו קרבנו את $f(x)$ על ידי $f(x) = f(x_0) + +(x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\alpha(x)$

הוכחה: הוכחת הטענה:

$$\begin{aligned}
R_n(x_0) &= 0 \\
R'_n(x) &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(x)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \\
R'_n(x_0) &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \\
&\vdots \\
R^{(k)}(x_0) &= 0 (k = 0, 1, 2, \ldots)
\end{aligned}$$

לפי לופיטל,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

■

<u>דוגמאות</u> נתון הפולינום

$$P(x) = 2x^4 = 3x^2 + 7x - 20$$

חשב את הפיתוח שלו סביב $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
P(1) &= 8 \\
P'(1) &= 8 + 6 + 8 = 21 \\
P''(1) &= 24 + 6 = 30 \\
P^{(3)} &= 24 * 2 = 48 \\
P^{(4)} &= 48 \\
P(x) &= -8 + \frac{21(x-1)}{1} + \frac{30(x-1)^2}{2!} + \frac{48(x-1)^3}{3!} + \frac{48(x-1)^4}{4!}
\end{aligned}$$

מסקנה 2.65 מפתוח הפולינים $P(x)$ סביב x_0 רואים כי $P(x_0) = 0 \Leftrightarrow P(x) = q(x)(x-x_0)$ כאשר $q(x)$ גם פולינום.

2.10.2 הערכת שגיאה

בדיקת השארית $R_n(x)$ בנוסחת טיילור לצורך הערכת השגיאה

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע $[x_0, x_0 + H]$, ונניח בקטע הזה קיימות כל הנגזרות $f^{(k)}(x)(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ ושהן כולן רציפות.

נניח גם כי ברווח הפתוח $x_0 < x < x_0 + H$ קיימת הנגזרת $f^{(n+1)}(x)$.

נסמן

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

<u>נקבע</u> את x ברווח $x_0 < x \leq x_0 + h$ ונגדיר פונקציה חדשה

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t) \cdot (x-t)^k}{k!}$$

ברווח $x_0 \le t \le x$. $\varphi(t)$ רציפה.

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0) &= R_n(x), \qquad \varphi(x) = f(x) - f(x) = 0 \\
\varphi'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x-t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

נסמן $\ell = k-1$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{f^{(\ell+1)}(t)}{\ell!}(x-t)^\ell = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
\end{aligned}$$

תהי $\psi(t)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $x_0 \le t \le x$ וגזירה בקטע הפתוח $x_0 < t < x$, ונשתמש במשפט קושי לגבי הזוג $\varphi(t)$, ו-$\psi(t)$, אזי עבור $x_0 < x$ קיימת $x_0 < c < x$ כך ש-

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

ונוסיף את ההנחה $\psi(x_0) \ne \psi(x)$ ו-$\psi' \ne 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{-R_n(x)}{\psi(x) - \psi(x_0)} &= \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n! \cdot \psi'(c)} \\
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n! \cdot \psi'(c)} \left(\psi(x) - \psi(x_0)\right)
\end{aligned}$$

אם נבחר את $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$, ונקבל

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

פונקציה זו מכונה <u>השארית לפי לגרנז'</u>.

2.10.3 נוסחת טיילור

קיימת $x_0 < c < x$ כך ש:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x-x_0)^k}{k!} + R_n(x) \\
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \\
& c \in (x, x_0) \text{ or } \in (x_0, x)
\end{aligned}$$

נחשב את המספר e עד לדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה. נקח $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ ו-$x = 1$.

$$\begin{aligned}
e^{(k)}(0) &= 1 \\
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \\
e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1) \\
R_n(1) &\leq \frac{10^{-4}}{2} \\
R_n(1) &= \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{10^{-4}}{2} \\
e^c &< e < 3 \\
&= \frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{10^{-4}}{2} \\
(n+1)! &> 60,000 \\
n+1 &= 9 \\
9! = 9 \cdot 8! &= 40,320 \cdot 9 > 60,000 \\
e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + R_8(1) \\
0 < R_8(1) &< \frac{3}{9!} < \frac{10^{-4}}{2}
\end{aligned}$$

משפט 2.66 אם $f(x)$ גזירה ברציפות מכל סדר בסביבת הנקודה x_0 , כולל ב-x_0, ואם <u>כל</u> הנגזרות $\left|f^{(k)}(0)\right| \leq \mathrm{K}$ לכל $k = 0, 1, 2, \ldots$ ולכל x בסביבת x_0, אזי

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \frac{\mathrm{K}(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0
\end{aligned}$$

לכל $x \in (-\infty, \infty)$

<u>דוגמה:</u> נפתח את $f(x) = \sin x$ סביב $x_0 = 0$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$

לכן השארית $R_n(x) \to 0$ לכל $-\infty < x < \infty$

$$\begin{aligned}
f^{(2n)}(0) &= 0 \\
f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x \\
f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n \\
\sin x &= \frac{1 \cdot x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) \\
R_{2n+2}(\frac{\pi}{18}) &= \frac{(-1)^{n-1} \sin c \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
|R_{2n+2}| &\leq \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
\frac{10^{-4}}{2} &> \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
n = 1 & \quad \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5!} = \frac{1}{120 \cdot 625 \cdot 5} < \frac{10^{-4}}{2} \\
R_{2n+2}\left(2\pi\right) &= \frac{(-1)^{n-1} \sin c \cdot (2\pi)^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{7^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{10^{-4}}{2} \\
n = 12 &
\end{aligned}$$

הערה 2.67 עבור פיתוח טיילור של $\ln(x+1)$, מתקיים

$$R_n(x) \to 0$$

רק כאשר $-1 \leq x \leq 1$, ולכן ניתן לפתח את טור טיילור רק עבור x בטווח זה.

<u>דוגמא:</u> פיתוח טיילון של $\frac{1}{x^3}$ סביב $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-3} \\
f'(x) &= -3x^{-4}, f'(3) = \frac{-3}{2^4} = \frac{-3!}{2^5} \\
f''(x) &= -3 \cdot -4x^{-5} = -3 \cdot -4 \cdot 2^{-5} = \frac{4!}{6} \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(n+2)!(-1)^n x^{-(n+3)}}{2} \\
f^{(n)}(2) &= \frac{(n+2)! \cdot (-1)^n}{2^{n+4}} \\
\frac{1}{x^3} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+2)!(-1)^k}{2^{k+4} k!}(x-2)^k + R_n(x) \\
R_n(x) &= \frac{\frac{(n+3)!}{2}(-1)^{n+1} c^{-(n+4)} (x-2)^{n+1}}{(n+1)!} = \\
&= \frac{(n+2)(n+3)(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2 \cdot c^{n+4}} \\
& \quad 0 < c < 2
\end{aligned}$$

<u>הערה:</u> אם $1 < x \leq 2$ אז $R_n(x) \to 0$. למעשה, התחום המקסימלי הוא $0 < x < 4$, אבל בשלב זה אנחנו לא יודעים להוכיח.

<u>דוגמא</u> תהי נתונה

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\
f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

אזי

$$
e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 + \ldots + 0 + R_n(x) = R_n(x)
$$

לא ניתן להתקרב לפונקציה בעזרת פולינום טיילור.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\
t &= \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \pm\infty \\
&= \lim_{t\to\infty} te^{-t^2} = \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{e^{t^2}}\right)' = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0 \\
f''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x}
\end{aligned}
$$

תמיד נכון שלכל n שלם

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{t^2}} &= 0 \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} &= 0
\end{aligned}
$$

2.11 בדיקת פונקציה על סמך תכונות הנגזרות

משפט 2.68 תהי $f(x)$ גזירה ב-(a,b) אזי $f(x) = C \text{ const} \iff f'(x) = 0$.

הוכחה: $\Rightarrow$: מההגדרה

$\Leftarrow$: תהי x_0 קבועה בקטע ו-x כלשהי בקטע. יש c בין x ו-x_0 כך ש:

$$
\frac{f(x) = f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) = 0
$$

■

משפט 2.69 אם f ו-g גזירות בקטע (a,b) ואם $f'(x) = g'(x)$ לכל x אזי $f(x) = g(c) + C$ כאשר C קבוע.

הוכחה: כי $F(x) = f(x) - g(x)$ היא פונקציה גזירה שנגזרתה 0, ולכן $F(x) = C$. ■

משפט 2.70 תהי $f(x)$ גזירה ב-(a,b).

- אם $f'(x) \geq 0$ לכל x אזי $f(x)$ לא יורדת

• אם $f'(x) > 0$ לכל x, אזי $f(x)$ עולה ממש.

הוכחה:

• נקח $x_1 < x_2$ כלשהן,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$$

לפי לגרנז', c בין x_1 ו-x_2, לכן $f(x_2) \geq f(x_1)$

• מוכח באותו אופן

■

הערה 2.71 $f(x)$ עולה $\iff$ $-f(x)$ יורדת, ולכן המסקנות תקפות לגבי פונקציות יורדות או לא עולות

משפט 2.72 אם $f(x)$ גזירה ב-(a,b) ולא יורדת, אזי $f'(x) \geq 0$ לכל x.

הוכחה:

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h>0)}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

■

<u>דוגמא</u>

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y' &= 3x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= xe^{-x} \\ y' &= e^{-x}(1-x) \\ y' > 0 & \quad x < 1 \\ y' < 0 & \quad x > 1 \end{aligned}$$

הפונקציה עולה משמאל ל-1 ויורדת מימיל ל-1, ולכן $x=1$ נקודת מקסימום, והערך המקסימי בסביבה זו הוא $y(1) = \frac{1}{e}$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

הגדרה 2.73 תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. x_0 תקרא נקודת אקסטרמום מקומית, מקסימום (או מינימום), אם קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

משפט 2.74 תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. אם x_0 מנקודת אקסטרמום מקומי, אזי או $f'(x_0) = 0$ או שלא קיימת $f'(x_0)$.

הוכחה: נתון x_0 נקודת אקסטרימום מקומי, נניח מינימום מקומי.

נניח $f'(x_0)$ קיימת אזי לפי פרמה גומרים. ■

הגדרה 2.75 תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. נאמר ש-$f(x)$ מחליפה סימן בעוברה את x_0 אם ל-$f(x)$ יש סימנים שונים בשני הצדדים של x_0.

משפט 2.76 אם $f(x)$ רציפה ב-x_0 ובעלת נגזרת חיובית (או שלילית) מימין ל-x_0, ונגזרת שלילית (או בהתאמה חיובית) משמאל ל-x_0, אזי x_0 נקודת מינימום (מקסימום).

2.11.1 תכונות לבדיקה

בבדיקת פונקציה, בדר"כ מחפשים את הדברים הבאים:

- נקודות התאפסות.
- תחומי עלילה וירידה.
- תחומי קמירות וקעירות.
- נקודות קיצון.

הגדרה 2.77 מקסימום או מינימום מקומיים אלו נקודות שבהן הפונקציה מוגדרת ימין ומשמאל, ואלה נקודות אקסטרמה.

- נקודות פיתול.

הגדרה 2.78 נקודת פיתול זו נקודה שבה יש מעבר מקמירות לקהירות (או להיפך). אם הנגזרת y'' רציפה, אז בנקודת פיתול, $y''=0$ (מניחים כי בנקודת פיתול הפונקציה רציפה).

- אסימפטוטות (אם יש)

הגדרה 2.79 $y=mx+b$ **היא אסימפטוטה ב-**∞ ($-\infty$) **אם**

$$(f(x)-(mx+b))\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

אם $(mx+b)-f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ **אז גם** $\frac{(mx+b)-f(x)}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ **אזי**

$$\begin{aligned} m+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x} &\to 0 \\ m &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) \end{aligned}$$

2.11.2 בדיקת אקסטרמום

משפט 2.80 הכלל הראשון לבדיקת אקסטרמה

אם לפונקציה $y=f(x)$**, הנגזרת** y' **מחליפה סימן בעוברה דרך נקודה** x_0**, אזי** x_0 **נקודת אקסטרמה אם** $f(x)$ **רציפה ב-**x_0.

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{aligned} y &= x^2e^{-x} \\ y' &= e^{-x}(2x-x^2)= \\ &= e^{-x}x(2-x) \end{aligned}$$

x		0		2	
y	+	0	+	+	+
y'	-	0	+	0	-
y''					

- **ב-**$0\leq x$ **הפונקציה יורדת**
- $0\geq x\geq 2$ **הפונקציה עולה**

* $x \geq 2$ הפונקציה יורדת.

$$\begin{aligned} y'' &= e^{-x}((x-2)^2-2) \\ y''=0 & \quad x-2=\pm\sqrt{2} \\ & \quad x=2\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

* לכן הפונקציה קמורה בתחומים $x \leq 2-\sqrt{2}, x \geq 2+\sqrt{2}$ ואחרת היא קעורה.
* $x=2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$ הם נקודות פיתול.

משפט 2.81 הכלל השני לבדיקת אקסטרמה

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0, ו-$f'(x_0)=0$.

* אם $f''(x_0) > 0$ אזי x_0 נקודת מינימום.
* אם $f''(x_0) < 0$, אזי x_0 נקודת מקסימום.

הוכחה: נניח למשל $f''(x_0) > 0$.

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)}{h}$$

לכן, יש סביבה של $h=0$ שבה $\frac{f'(x_0+h)}{h} > 0$. אם $h > 0$ אזי $f'(x_0+h) > 0$ ולכן $f(x)$ עולה מימין ל-x_0. ואם $h < 0$, אזי $f'(x_0+h) < 0$ ולכן $f(x)$ יורדת משמאל ל-x_0. ■

<u>דוגמא</u> $y = x + 2\sin x$, חשב אקסטרמה ב-$[-\pi, 3\pi)$

$$\begin{aligned} y' &= 1+2\cos x = 0 \\ & \cos x = -\frac{1}{2} \\ & x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}+2\pi, \frac{4\pi}{3}-2\pi \\ y'' &= -2\sin x \\ & y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \text{ - maxima} \\ & y''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 0 \text{ - minima} \\ & y''\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right) = -\sqrt{3} < 0 \\ & y''\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi\right) = \sqrt{3} > 0 \end{aligned}$$

משפט 2.82 תהי $f(x)$ גזירה n פעמים ב-x_0, ומקיימת

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

- אם n זוגי, אזי x_0 נקודת אקסטרמום.
- אם $f^{(n)}(x_0) > 0$ ו-n זוגי אזי x_0 נקודת מינימום.
- אם $f^{(n)}(x_0) < 0$ ו-n זוגי אזי x_0 נקודת מקסימום.
- אם n איזוגי אזי x_0 איננה נקודת אקסטרמום.

הוכחה: הוכחנו שאם f גזירה n פעמים ב-x_0 אזי בסביבת x_0 תהי

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + (x-x_0)^n\,\alpha(x) \end{aligned}$$

כאשר $\alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

ובמקרה שלנו, $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right]$

אם n זוגי ו-$f^{(n)}(x_0) > 0$ אזי x_0 נקודת מינימום. ■

2.11.3 קמירות וקעירות בנקודה

הגדרה 2.83 תהי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ומוגדרת בסביבת x_0. נאמר כי f קמירה ב-x_0 אם המשיק לגרף בנקודה $y = f(x)$ בנקודה x_0 נמצא מתחת (במובן החלש) לגרף בסביבה של x_0. נאמר ש-f קעורה ב-x_0 אם המשיק בx_0 נמצע מעל לגרף.

משוואת המשיק ב-x_0: השיפוע הוא $f'(x_0)$ והגרף עובד דרך $(x, f(x_0))$, משוואת המשיק היא

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x-x_0) \\ g(x) = y &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

אם f קמורה ב-x_0, נרצה כי $g(x) \leq f(x)$ בסביבה של x_0.

עתה, נניח כי ל-$f(x)$ קיימת הנגזרת $f''(x)$. נעשה פתוח טילור ראשון סביב x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + (x-x_0)^2\alpha(x)$$

ו-$0 \xrightarrow[x\to x_0]{} \alpha(x)$ כלשהו. נראה כי החלק הראשון של הפיתוח שווה ל-$g(x)$, אזי:

$$f(x) - g(x) = (x-x_0)\left[\frac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x)\right]$$

אזי בסביבת x_0, $\alpha(x)$ ניתן להזנחה והסימן של $f(x) - g(x)$ יהיה אי שלילי, ואז $f(x) \geq g(x)$ בסביבת x_0.

ולהיפך - אם $f''(x_0) < 0$, אז נובע ש-$f(x) - g(x) \leq 0$, ז"א, בסביבת x_0 מתקיים $f(x) \leq g(x)$, כלומר - קעורה.

משפט 2.84 נניח כי f גזירה n פעמים ב-x_0, ונניח

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

1. אם n זוגי אזי f קמורה ב-x_0 אם $f^{(n)}(x_0) > 0$ וקעורה ב-x_0 אם $f^{(n)}(x_0) < 0$.

2. אם n אי זוגי, אזי x_0 נקודת פתול (כלומר, בסביבה ימנית הוא קעור ובשמאלית קמור או ההפך).

הוכחה: $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ אז מפיתוח טיילור בנקודה x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(x)+(x-x_0)f'(x_0)) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + (x-x_0)^n\alpha(x) \end{aligned}$$

וכן $\alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, אזי

$$f(x)-g(x) = (x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)\right]$$

■

2.12 קירובים

2.12.1 קירוב ניוטון

על מנת למצוא x בקטע $[a,b]$ המקיים $f(x)=0$, בוחרים x_0 בקטע. אזי מוצאים את נקודת החיתוך של המשיק ל-x_0 בקטע ובוחרים את x_1 כשיעור ה-x של נקודת החיתוך וחוזר חלילה. מגדירים

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ובאינדוקציה:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n = 1, 2, \ldots$$

אם הפתרון הוא $f(c)$, רוצים להעריך את $|c-x_n|$, על כן רצוי ש-x_n תהיה **סדרת קושי** בקטע $[a,b]$.

רצוי לבחור את $[a,b]$ כך ש-$f(a)<0<f(b)$ והפונקציה מונוטונית בקטע.

2.12.2 משפט נקודת השבת של בנך ושימושים

הגדרה 2.85 תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת על קטע I. נקודה x_0 תקרא אם $f(x_0)=x_0$.

הערה 2.86 שימו לב שאם f רציפה בקטע סגור I ומעתיקה את I <u>על</u> עצמו אזי יש נקודת שבת x_0.

הוכחה: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$ ומעתיקה אותו על עצמו. נגדיר

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-x \\ g(a) &= f(a)-a \geq 0 \\ g(b) &= f(b)-b \leq 0 \end{aligned}$$

וממשיכים בעזרת ערך הביניים. ■

הגדרה 2.87 תהי $f:[a,b]\to R$, נאמר ש-f מכווצת אם לכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$ ו-$K>1$ קבוע.

הגדרה 2.88 פונקצית ליפשיץ היא פונקציה f שעבורה קיים $K>0$ ומתקיים $|f(x)-f(y)| \le K\,|x-y|$
ברור שפונקצית ליפשיץ היא רציפה, ואם הקטע סגור וסופי אזי היא רציפה במידה שווה.

משפט 2.89 משפט נקודת השבת של בנך

תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ העתקה מכווצת עם קבוע ליפשיץ $K<1$ אזי ל-f יש נקודת שבת c אחת ויחידה, כלומר, מקיימת $c=f(c)$. יתר על כן, לכל $x_0\in[a,b]$ אם $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרת הנקודות שמתקבלת על ידי איטרציות של f,

$$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1)\ldots,x_n=f(x_{n+1})$$

אזי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

יתר על כן, ניתן להעריך את השגיאה, כלומר את $|x_n-c|$ ע"י אי השוויון:

$$|x_n-c| \le \frac{K^n}{1-K}\,|x_1-x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

הערה 2.90 אם $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$, ואם $f'(x)$ חסומה, אזי נגדיר:

$$K:=\sup_x |f'(x)|<\infty$$

אזי f היא העתקת ליפשיץ עם הקבוע K, כי לפי משפט לגרנז', לכל $x\ne y$, קיימת נקודה ξ בין x ל-y כך ש:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(\xi)| \le K$$

הוכחה: נסמן $F_1(x_0)=f(x_0),F_2(x_0)=f\left(f_1(x_0)\right),\ldots F_n(x_0)=f\left(f_{n-1}(x_0)\right)$
יהי n טבעי.

$$\begin{aligned}|f(x_{n+1})-f(x_n)| &= |f\left(f(x_n)\right)-f\left(f(x_{n-1})\right)|\\ &\le K\,|f(x_n)-f(x_{n-1})|\\ &\le K^2\,|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\ldots\\ &= K^n\,|x_1-x_0|\end{aligned}$$

■

$\{x_n\}$היא סדרת קושי, ולכן מתכנסת לגבול c.
הוכחה: יהי $m<n$

$$\begin{aligned}|x_n-x_m| &= |(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots+(x_{m+1}-x_m)|\\ &\le |x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\ldots+|x_{m+1}-x_m|\\ &\le K^{n-1}\,|x_1-x_0|+K^{n-2}\,|x_1-x_0|+\ldots K^m\,|x_1-x_0|\\ &= K^m\,|x_1-x_0|\left[1+K+K^2+\ldots+K^{n-m-1}\right]\\ &= \frac{K^m}{1-k}\,|x_1-x_0|\end{aligned}$$

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שאם $n>m\ge N(\varepsilon)$, יהיה $|x_n-x_m|\le\varepsilon$ לכן x_n סדרת קושי בקטע סגור ולכן מתכנסת ל-c. ■

אם באי השוויון הנ"ל נשאיף $n\to\infty$ נקבל $|c-x_m| \le \frac{K^m}{1-k}\,|x_1-x_0|$

טענה 2.91 $c=f(c)$.

ואומנם, $x_n\to c$, ומרציפות f, $c \leftarrow f(x_n)=x_{n+1}\to c$

נקודת השבת c היא יחידה כי אם גם d נקודת שבת

$$\begin{aligned} d &= f(d), c=f(c) \\ |c-d| &= |f(c)-f(d)| \le K|c-d| \end{aligned}$$

מתקיים רק אם $K>1$, וזו סתירה, ולכן $c=d$.

<u>דוגמא:</u> יהי $\frac{\pi}{2}\le 0\le 1$ אזי הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא העתקה מכווצת בקטע $[0,a]$.

$$0\le x\le a\ , |f'(x)|=|-\sin x|=\sin x\le \sin a= \mathrm{K}$$

כדי להשתמש בנקודת השבת, צריך שהקטע $[0,a]\subseteq[\cos a,\cos 0]$, כלומר, $a>1$. לכן הפונקציה $\cos x$ אמנם מעתיקה את $[0,a]$ לתוכו. ואז, לפי משפט בנך, יש נקודת שבת c, $c=\cos c$ בקטע $[0,a]$.

א. נבחר $a=1, x_0=1$.

$$\begin{aligned} K &= \sin 1 \\ |x_n-c| &\le \frac{(\sin 1)^n}{1-\sin 1}|1-\cos 1| \end{aligned}$$

רוצים דיוק עד ל-4 ספרות אחרי הנקודה, צריך n

$$\begin{aligned} \frac{(\sin 1)^n}{1-\sin 1}(1-\cos 1) &< \frac{10^{-4}}{2} \\ n &= 64 \end{aligned}$$

ב. $a=\frac{\pi}{4}$ לא טוב למשפט, כי $a<1$, אבל $1<a=\frac{\pi}{3}$ והוא בסדר.

$$K=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

נבחר $x_0=0$.

$$|x_n-c|\le\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot(1-\cos 1)$$

$n=100$ יתן שגיאה $<\frac{10^{-5}}{2}$. כלומר, c מדוייק עד וכולל הספרה החמישית.

<u>דוגמא</u>

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & : x\neq 0\\ 1 & : x=0\end{cases}$$

למצוא פתרון למשוואה $x=\frac{\sin x}{x}$ שאינו $x=0$.

__טענה__ $f(x)$ מכווצת ב-$[0,\frac{\pi}{2}]$. $c=0.87673$

$$|f'(x)| \quad = \quad \left|\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right| = \frac{\cos|\tan x - x|}{x^2}$$

נקח את הקטע $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right] \xrightarrow{f} \left[\frac{\sqrt{3}/2}{\pi/3},\frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4}\right] \supseteq \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

$$\max_{\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}} |f'(x)| = \left|f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \frac{3}{2\pi^2}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) < 0.313$$

נקח $x_0=\frac{\pi}{4}$, אז $x_1=f(x_0)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

$$|x_n-c| \le \frac{(0.313)^n}{1-0.313}\left|\frac{2\sqrt{2}}{\pi}-\frac{\pi}{4}\right|$$

רוצים c בדיוק של 5 ספרות אחרי הנקודה. $n=9$.

נראה שימוש למשפט על ידי כך שנפתור משוואה מהצורה $f(x)=0$.

משפט 2.92 תהי $f(x)$ רציפה וגזירה בקטע $[a,b]$. נניח כי

1. $f(a)<0<f(b)$
2. קיימים M ו-m כך ש- $0<m\le f'(x)\le m$ לכל x.

אזי הפונקציה $g(x)=x-\lambda f(x)$, עבור $\lambda=\frac{1}{M}$ מקיימת $0\le g'(x)\le 1-\frac{m}{M}(<1)$, ולכן $g(x)$ העתקה מכווצת עם $K=1-\frac{m}{M}$, ו-g מעתיקה את $[a,b]$ לתוך עצמו, ולכן ל-g יש נקודת שבת אחת ויחידה c בקטע $[a,b]$. כלומר, $g(c)=c \Leftarrow f(c)=0$.

הוכחה: $g'(x)=1-\lambda f'(x)=1-\frac{f'(x)}{M}$. לכן $g(x)$ מונוטונית עולה.

$$g'(x)=1-\frac{f'(x)}{M}\le 1-\frac{m}{M}$$

ולכן $g(x)$ מכווצת עם קבוע $K=1-\frac{m}{M}(<1)$. ת

תהי $a\le x\le b$ כלשהיא.

$$\begin{aligned} g(x) &\ge g(a)=a-\lambda f(a)>a \\ g(x) &\le g(b)=b-\lambda f(b)<b \\ a &< g(x)<b \end{aligned}$$

לכן $g(x)$ מקיימת את תנאי משפט נקודת השבת. יתר על כן אם נקח $a\le x_0\le b$ כדשהיא, אזי הסדרה

$$x_n=g(x_{n-1}), n=1,2,3\ldots$$

מתכנסת ל-c.

$$\begin{aligned} |x_n-c| &\le \frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)^n}{\frac{m}{M}}\left|\frac{f(x_0)}{M}\right| = \\ &= \frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)^n}{m}|f(x_0)| \end{aligned}$$

■

דוגמה

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3+x-1\\
f(0) &= -1\\
f(1) &= 1\\
m=1\le f'(x) &= 3x^2+1\le 4=M\\
\lambda &= \frac{1}{M}=\frac{1}{4}\\
K &= 1-\frac{m}{M}=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

נקח $x_0=\frac{1}{2}$, . הפונקציה $g(x)=x-\frac{1}{4}\left(x^3+x-1\right)$ מכווצת עם קבוע $K=\frac{3}{4}$ ומעתיקה את $[0,1]$ לעצמו.

$$\begin{aligned}
x_n &= g(x_{n-1}), n=1,2,3\ldots\\
|x_n-c| &\le \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1}\left|\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-1\right|=\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\frac{3}{8}\\
x_1 &= g(x_0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{19}{32}\\
x_2 &= 0.642\\
x_3 &= 0.666\\
x_4 &= 0.675\\
x_5 &= 0.679\\
x_6 &= 0.681\\
&\vdots\\
c &= 0.68232780382801932738\ldots
\end{aligned}$$

נכון עד כדי דיוק של $0.42\cdot 10^{-19}$. לא נעשה בעזרת קירוב בנך.

2.12.3 שיטת ניוטון לפתרון משוואה $f(x)=0$.

הערה 2.93 משוואת המשיק למשוואה $y=f(x)$ בנקודה x_1 היא

$$\begin{aligned}
\frac{y-f(x_1)}{x-x_1} &= f'(x_1)\\
y &= f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)
\end{aligned}$$

משוואה זו מתאפסת בנקודה x_2.

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)\\
x_2 &= x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n=1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

משפט 2.94 תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$ ומקיימת

1. $f(a)<0<f(b)$

2. $f'(x) > 0$ ו-$f''(x) > 0$ לכל $a \le x \le b$.

אז למשוואה $f(x) = 0$ קיים בדיוק שורש אחד c בקטע $[a,b]$. אם נבחר $x_1 = b$ אזי הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל-c.

$$|x_{n+1} - c| < \frac{M}{2m}\,|x_{n+1} - x_n|^2$$

כאשר

$$\begin{aligned} M &= \sup_{a<x<b} f''(x) \\ m &= \inf_{a<x<b} f'(x) \end{aligned}$$

הוכחה: תהי x_n הסדרה הנ"ל. מפיתות טיילור עד סדר ראשון סביב x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)(x - x_n)^2}{2!}$$

כאשר ξ נקודה בין x_n ו-x. תהי c פתרון המשוואה $f(c) = 0$.

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (c - x_n) + \frac{f''(\xi)(c - x_n)^2}{2}$$

אז מהמשוואה $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (תוך הצבה של x_n במשוואה לעיל) מתקבל:

$$(x_{n+1} - c)\, f'(x_n) = \frac{f''(\xi)(x - x_n)^2}{2}$$

היותו-$f', f'' > 0$, נקבל $x_{n+1} - c > 0$, כלומר $x_{n+1} > c$ ולכן $\{x_n\}$ חסומה מלרע ע"י c.
$f \uparrow$ (כי $f' \ge 0$) ולכן $0 = f(c) < f(x_n)$ ומהנוסחא

$$\begin{aligned} f(x_n) - f'(x_n)x_n &= -f'(x_n)x_{n+1} \\ (0 = f(c) <)\, f(x_n) &= f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) \end{aligned}$$

ולכן $x_{n+1} > x_n$. הסדרה $\downarrow$ x_n וחסומה מלרע על ידי c, ולכן מתכנסת לגבול ℓ.
נראה ש-$\ell = c$. מרציפות f נקבל $f(x_n) \to f(\ell)$. ומרציפות של f' גם $f'(x_n) \to f'(\ell)$ ולכן

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

ולכן $f(\ell) = 0$, ומיחידות הנקודה c, נובע $\ell = c$ (f מונוטונית עולה ממש). נותר להעריך את $|x_{n+1} - c|$. נציב בקירוב טיילור $x = x_{n+1}$

$$f(x_{n+1}) = [f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)] + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} f''(\xi)$$

אך התוכן של הסוגריים הרבועות שווה לאפס ולכן

$$= \frac{(x_{n+1} - x_n)^2\, f''(\xi)}{2}^{\dagger}$$

אבל לפי לגרנז'

$$\frac{f(x_{n+1})-f(c)}{x_{n+1}-c}=f'(\eta)$$

עבור $c<\eta<x_{n+1}$ מסויימת.

$$f(x_{n+1})=f'(\eta)(x_{n+1}-c)$$

נציב ב-†ונקבל

$$\begin{aligned}
f'(\eta)(x_{n+1}-c) &= \frac{(x_{n+!}-x_n)^2}{2}f''(\xi) \\
|x_{n+1}-c| &= \left|\frac{f''(\xi)}{f'(\eta)}\right|\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{2} \\
&\le \frac{M}{2m}\left|x_{n+1}-x_n\right|^2
\end{aligned}$$

■

<u>דוגמה</u> בדוגמא $f(x)=x^3+x-1$ נתחיל עם $x=1$ונקבל:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 0.75 \\
x_3 &= 0.6860 \\
&\vdots \\
x_5 &= 0.6823278039 \\
x_6 &= 0.68232780382801932738
\end{aligned}$$