

סדרות

גבול של סדרה – הגדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה כלשהי, נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול של הסדרה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים

$$\mathbb{N} \ni n_0 \text{ כך שלכל } n \geq n_0 \text{ מתקיים } |a_n - L| < \varepsilon. \text{ סימון: } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L$$

התכנסות במובן הרחב – הגדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה כלשהי, נאמר שהיא מתכנסת לאינסוף אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\mathbb{N} \ni n_0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n > M$. סימון: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty$ (התכנסות ל $-\infty$ ל $a_n < -M$)

תת סדרה – הגדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה נתונה ו- $\{n_k\}$ סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים, $\mathbb{N} \ni k$, נגדיר $b_k = a_{n_k}$. אז כל סדרה $\{b_k\}$, נאמר שהיא תת סדרה של $\{a_n\}$.

משפטים על סדרות מתכנסות:

1. הגבול הוא יחיד.
2. כל סדרה מתכנסת היא חסומה (לא עובד בכיוון ההפוך).
3. אם a_n מתכנסת ל- L , אז $|a_n|$ מתכנסת ל- $|L|$ (לא עובד בכיוון ההפוך).
4. $\lim(a_n) = A, \lim(b_n) = B, c$ קבוע כלשהו
 - $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot A$
 - $\lim(b_n + a_n) = A + B$
 - $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
 - $\lim(a_n/b_n) = A/B$ ($b_n \neq 0$ לכל $n, B \neq 0$)
5. אם $\{b_n\}$ חסומה (לאו דוקא מתכנסת) ו- $\{a_n\}$ מתכנסת ל- 0 , אז $\{a_n \cdot b_n\}$ מתכנסת ל- 0 .
6. $\{a_n\}$ מתכנסת ל- L, b מספר ממשי כלשהו. אם קיים $\mathbb{N} \ni n_0$, כך שלכל $n \geq n_0, a_n \geq b$ אז $L \geq b$.
7. אם $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ מתכנסות ו- $a_n \geq b_n$ כמעט לכל n , אז $\lim(a_n) \geq \lim(b_n)$.
8. משפט הסנדוויץ' - $\{a_n\}, \{b_n\}$ ו- $\{c_n\}$ סדרות מתכנסות. אם $\lim(a_n) = \lim(c_n) = L$ ואם קיים $\mathbb{N} \ni n_0$, כך שלכל $n \geq n_0, c_n \geq b_n \geq a_n$, אז $\lim(b_n) = L$.
9. אם $\{a_n\}$ שואפת ל- 0 אבל שונה מ- 0 , אז הסדרה $1/|a_n|$ שואפת לאינסוף.

10. כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת לגבול סופי.
11. כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.
12. הלמה של קנטור - $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה, $\{b_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת, ומתקיים $a_n < b_n$ לכל n ו- $\lim(b_n - a_n) = 0$, אז שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.
ניסוח "גיאומטרי" של המשפט: $\{[a_n, b_n]\}$ היא סדרה של קטעים סגורים כך שכל קטע מוכל ממש בקודם ו- $\lim(b_n - a_n) = 0$ (המרחק בין קצוות הקטעים שואף ל-0), אז קיימת נקודה אחת c כך ש- $[a_n, b_n] \ni c$ לכל n .
13. אם הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת (גם במובן הרחב), אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול. מסקנה: אם לסדרה יש שתי תת סדרות שלא מתכנסות לאותו גבול, אז היא לא מתכנסת.
14. משפט Bolzano-Weierstrass - לכל סדרה חסומה (גם אם היא מתבדרת) יש תת סדרה מתכנסת.

חישובי גבולות:

1. לפי כלל הסנדוויץ' (משתמשים בדרך כלל בתרגילים של סכום אינסופי).
2. מבחן המנה- $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim(a_{n+1}/a_n)=q$ אז: $a_n \ll q < 1$ שואפת ל-0
(משתמשים בדרך כלל בחזקות ועצרות)
 $a_n \ll q > 1$ שואפת ל- ∞
 $a_n \ll q = 1$ אי אפשר לדעת
3. מבחן השורש- $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם $\lim(\sqrt[n]{a_n})=c$ אז: $a_n \ll c < 1$ שואפת ל-0
 $a_n \ll c > 1$ שואפת ל- ∞
 $a_n \ll c = 1$ אי אפשר לדעת
4. שורש n-י של סדרה- $\{a_n\}$ סדרה חיובית. אם קיים $\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ אז הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}$

$$\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim(\sqrt[n]{a_n})$$

- מתכנסת ומתקיים
- בפרט, סדרה שהיא שורש n-י של פולינום מתכנסת תמיד ל-1.
5. מנת פולינומים- אם חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה – הגבול הוא ∞ או $-\infty$
אם חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה – הגבול הוא 0
אם חזקת המונה שווה לחזקת המכנה – הגבול הוא מנת המקדמים של החזקות הגבוהות.

$$6. \text{ הגבול } -e^k \text{ -} e^k = \lim \left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n} \text{ , בתנאי ש-} a_n \text{ שואפת לאינסוף.}$$

7. גבול של ממוצע חשבוני/הנדסי/הרמוני של הסדרה שווה לגבול הסדרה.

פונקציות

הגדרה:

תהיינה E, D שתי קבוצות של מספרים ממשיים $(E, D \subseteq \mathbb{R})$, פונקציה f מן הקבוצה D לקבוצה E היא כלל מוגדר הייטב על פיו מתאימים לכל מספר $x \in D$ מספר $y \in E$ יחיד.
סימון: $f: D \rightarrow E$, $f(x)=y$

- מונחים:
- הקבוצה D נקראת תחום ההגדרה של פונקציה f .
 - הקבוצה E נקראת הטווח של פונקציה f .
 - המשתנה x נקרא המשתנה הבלתי תלוי של פונקציה f .
 - המשתנה y נקרא המשתנה התלוי של פונקציה f .
 - אם $f(x)=y$, x נקרא המקור של y , ו- y נקרא התמונה של x . המקור הוא לא בהכרח יחיד.

תחום ההגדרה של הפונקציה- תהי $f(x)$ פונקציה הנתונה ע"י נוסחא/ות. תחום ההגדרה הטבעי שלה הוא קבוצת המספרים הממשיים הגדולה ביותר עבורה הביטוי $f(x)$ מוגדר.

תמונה- אם $f: D \rightarrow E$ פונקציה, אז התמונה מוגדרת ע"י קבוצת כל התמונות של איברי D .
סימון: $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$ (image)

פונקציה חסומה- נאמר שפונקציה $y=f(x)$ היא חסומה מעל התחום D אם קיים מספר ממשי M כך ש $|f(x)| < M$ לכל $x \in D$.

פונקציה חד-חד-ערכית (חח"ע)- פונקציה חח"ע $f: D \rightarrow E$ היא פונקציה המקיימת:
 $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$ (המקור x הוא יחיד לכל y).

פונקציה על- פונקציה נקראת על (E) , כאשר $\text{Im}(f)=E$, אם לכל $y \in E$ יש מקור ב- $x \in D$.

פונקציית הזהות- $I(x)=x$, $I: D \rightarrow D$ (היא גם חח"ע וגם על).

הרכבה של פונקציות- $f: C \rightarrow D$ $f \circ g$ ההרכבה
 $g: D \rightarrow E$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
 $(f \circ g): C \rightarrow E$

פונקציה הפוכה- $f: C \rightarrow D$. אם קיימת פונקציה $g: D \rightarrow C$ כך ש $g \circ f = I_C$ ו-
 $f \circ g = I_D$ אז נאמר ש- $f(x)$ היא פונקציה הפיכה וש- $g(x)$ היא הפונקציה ההפוכה שלה.
רק פונקציה שהיא חח"ע וגם על יכולה להיות הפיכה. סימון: $g(x)=f^{-1}(x)$

הגדרת גבול של פונקציה לפי Heine - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, (פרט, אולי, לנקודה $x=a$ עצמה), אז מספר ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- a . סימון: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$. אם לכל סדרה $\{x_n\}$, $a \neq x_n$, לכל n , עבורה x_n שואף ל- a . כאשר n שואף לאינסוף, מתקיים שהסדרה $\{f(x_n)\}$ שואפת ל- L כאשר n שואף לאינסוף.

הגדרת גבול של פונקציה לפי Cauchy - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, (פרט, אולי, לנקודה $x=a$ עצמה), אז מספר ממשי L יקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- a , אם לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

גבול סופי כש- x שואף לאינסוף – הגדרה - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף לאינסוף, אם לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר E כך שלכל $x > E$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

גבול אינסופי כש- x שואף ל- a – הגדרה - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, נאמר שהגבול של $f(x)$ הוא אינסוף כאשר x שואף ל- a , אם לכל מספר ממשי $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $f(x) > M$.

גבול אינסופי כש- x שואף לאינסוף – הגדרה - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת על החצי הימני של הציר $(0, \infty)$, נאמר שהגבול של $f(x)$ הוא אינסוף כאשר x שואף לאינסוף, אם לכל מספר ממשי $M > 0$ קיים מספר D כך שלכל $x > D$ מתקיים $f(x) > M$.

גבולות חד צדדיים – הגדרה - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבה הימנית של הנקודה $x=a$ (כלומר בקטע פתוח $(a, a+\delta)$), נאמר שמספר ממשי L הוא הגבול הימני של $f(x)$ כאשר x שואף ל- a^+ (מצד ימין), אם לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, a+\delta)$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

רציפות של פונקציה – הגדרה - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש- $f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. קיים הגבול בנקודה $x=x_0$.
2. ערך הגבול בנקודה $x=x_0$ שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=x_0$ ($f(x_0)$).

רציפות חד צדדית – הגדרה - תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בנקודה $x=x_0$, נאמר ש- $f(x)$ רציפה מימין ל- x_0 אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. קיים הגבול הימני בנקודה $x=x_0$.
2. ערך הגבול הימני בנקודה $x=x_0$ שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=x_0$ ($f(x_0)$).

סוגי נקודות אי רציפות:

1. אי רציפות סליקה – הגדרה- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש- x_0 היא נקודת אי רציפות סליקה אם:
 - (א) קיים הגבול בנקודה $x=x_0$.
 - (ב) ערך הגבול בנקודה $x=x_0$ לא שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=x_0$, או ש- $f(x)$ לא מוגדרת בנקודה $x=x_0$.
2. אי רציפות ממין ראשון (קפיצה) – הגדרה- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש- x_0 היא נקודת אי רציפות ממין ראשון אם הגבולות החד צדדיים בנקודה $x=x_0$ קיימים וסופיים, אבל לא שווים.
3. אי רציפות ממין שני (עיקרית) – הגדרה- תהי $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בסביבת הנקודה $x=x_0$, נאמר ש- x_0 היא נקודת אי רציפות ממין שני אם לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים בנקודה $x=x_0$ לא קיים (כלומר, לא סופי).

משפטים:

1. פונקציה היא הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} (g(x)) = B$, c קבוע ממשי כלשהו
 - $\lim(c \cdot f(x)) = c \cdot A$
 - $\lim(f(x) + g(x)) = A + B$
 - $\lim(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
 - $\lim(f(x)/g(x)) = A/B$ ($B \neq 0$, וקיימת סביבה כלשהי של a כך ש $g(x) \neq 0$)
3. משפט הסנוויץ' - $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה $x=a$. נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $h(x) \geq f(x) \geq g(x)$. אם קיימים הגבולות $\lim(h(x)) = \lim(g(x)) = L$, אז $\lim(f(x)) = L$.
4. אם $f(x)$ חסומה בסביבת הנקודה a , והגבול של $g(x)$ הוא 0 כש- $x \rightarrow a$ אז:
 - $\lim(f(x) \cdot g(x)) = 0$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$ (זה עובד רק ברדיאנים)
6. אם $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, וקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$, אז קיימת סביבה של a אשר בה $f(x)$ חסומה.

7. אם $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, וקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$

כך ש- $L \neq 0$, אז:

▪ $L > 0 \Leftarrow$ בסביבה הזאת $f(x) > 0$ לכל x .

▪ $L < 0 \Leftarrow$ בסביבה הזאת $f(x) < 0$ לכל x .

8. לפונקציה $f(x)$ קיים גבול בנקודה $x=a$ אם ורק אם קיימים ושווים שני הגבולות החד צדדיים ב- $x=a$.

9. כל פונקציה אלמנטרית (כלומר, פונקציה המתקבלת מפעולות הרכבה, כפל, חילוק,

חיבור וחיסור על הפונקציות הבסיסיות: $f(x)=\sin x$, $f(x)=a^x$ ($a > 0$), $f(x)=x$, $f(x)=c$) היא רציפה בתחום ההגדרה הטבעי שלה.

10. $f(x)$, $g(x)$ – פונקציות רציפות ב- x_0 , c קבוע כלשהו

▪ $c \cdot f(x)$ – פונקציה רציפה ב- x_0

▪ $f(x)+g(x)$ – פונקציה רציפה ב- x_0

▪ $f(x) \cdot g(x)$ – פונקציה רציפה ב- x_0

▪ $f(x)/g(x)$ – פונקציה רציפה ב- x_0 , $g(x_0) \neq 0$

11. $f(x)$ רציפה ב- x_0 אם ורק אם היא רציפה מימין ומשמאל ב- x_0 .

12. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אם $f(a) \cdot f(b) < 0$, אז קיימת לפחות נקודה אחת $a < c < b$, כך ש- $f(c)=0$.

13. $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$ היא פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. קיימת לפחות נקודה אחת $a < c < b$, כך ש- $f(c)=c$ (נקודת שבת).

14. משפט ערך הביניים של Cauchy – $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, y_0 הוא מספר ממשי בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אז קיימת לפחות נקודה אחת $a < c < b$, כך ש- $f(c)=y_0$.

15. משפט Weierstrass – אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז $f(x)$ חסומה, והיא מקבלת מקסימום ומינימום בקטע הזה.

נגזרות

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{או} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{הגדרה:}$$

כללים בסיסיים:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{או} \quad h'(t_0) = [f(g(x))]' = f'(x_0) \cdot g'(t_0) \quad \text{כלל השרשרת:}$$

נגזרות בסיסיות:

$$c' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(ax)' = a$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

* הנגזרת $f'(x_0)$ היא שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_0 .
 לכן, משוואת הישר המשיק לגרף היא: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

משפטים:

1. אם $f(x)$ גזירה בנק' x_0 , אזי היא רציפה שם. מסקנה: אם $f(x)$ אינה רציפה ב- x_0 , אזי היא אינה גזירה שם.

2. משפט Fermat - תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע פתוח (a,b) , וגזירה בנקודה פנימית $(a,b) \ni x_0$. אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או הקטן ביותר ב- (a,b) , אז $f'(x_0)=0$.

3. משפט Rolle - תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$, ומקיימת את התנאים הבאים:

- $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
- $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b) .
- $f(a)=f(b)$

אז קיימת נקודה $(a,b) \ni c$ כך ש- $f'(c)=0$.

4. משפט ערך הביניים של Lagrange - תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$, ומקיימת את התנאים הבאים:

- $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
- $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b) .

אז קיימת נקודה $(a,b) \ni c$ עבורה $f'(c)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$.

5. משפט ערך הביניים המוכלל של Cauchy - תהינה $f(x)$, $g(x)$ מוגדרות בקטע סגור $[a,b]$, ומקיימת את התנאים הבאים:

- $f(x)$, $g(x)$ רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
- $f(x)$, $g(x)$ גזירות בקטע הפתוח (a,b) .

נניח ש- $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

אז קיימת נקודה $a < c < b$ עבורה $f'(c)/g'(c)=[f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]$.

6. תחומי עלייה וירידה – משפט - תהי $f(x)$ גזירה בקטע פתוח (a,b) , אז:

$$\square f(x) \text{ מונוטונית עולה בקטע } (a,b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \text{ לכל } (a,b)$$

$$\square f(x) \text{ מונוטונית יורדת בקטע } (a,b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \text{ לכל } (a,b)$$

(במקרה שהפונקציה עולה/יורדת ממש רק הכיוון $[f'(x) > 0]$ עובד).

7. כלל לופיטל- מקרה של " $\frac{0}{0}$ ":

$f(x), g(x)$ גזירות בסביבת הנקודה $x=a$, פרט, אולי, ל- a עצמה, ומקיימת את התנאים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x)) = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \text{ קיים} \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \text{ ו-קיים} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \text{ אז הגבול}$$

אנלוגיות:

המשפט נכון גם כאשר $x \rightarrow a^+$ או $x \rightarrow a^-$.

המשפט נכון גם כאשר $x \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$.

$f(x), g(x)$ גזירות ב- (a, ∞) , ומקיימת את אותם התנאים כאשר $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \text{ אז}$$

מקרה של " $\frac{\infty}{\infty}$ ":

$f(x), g(x)$ גזירות בסביבת $x=a$, פרט, אולי, ל- a עצמה, ומקיימת את התנאים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x)) = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \text{ קיים} \quad \bullet$$

$$g'(x) \neq 0 \text{ לכל } x \neq a \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \text{ אז}$$

אנלוגיות:

המשפט נכון גם כאשר $x \rightarrow a^+$ או $x \rightarrow a^-$.

המשפט נכון גם כאשר $x \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$.

8. משפט טיילור:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

טורי מקלורן ידועים:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!} x^k$$

אינטגרלים לא מסויימים

אינטגרלים מיידיים:

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \sin(y(x))y'(x)dx = -\cos(y(x)) + c$$

$$\int \cos(y(x))y'(x)dx = \sin(y(x))$$

$$\int \frac{y'(x)dx}{y(x)} = \ln |y(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sin^2(y(x))} dx = -\cot(y(x)) + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{\cos^2(y(x))} dx = \tan(y(x)) + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{a^2 + y^2(x)} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y(x)}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{a^2 - y^2(x)}} dx = \arcsin\left(\frac{y(x)}{a}\right) + c$$

$$\int a^{y(x)} y'(x) dx = \frac{a^{y(x)}}{\ln(a)} + c$$

כללים בסיסיים:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

אינטגרלים מסויימים

$$\sigma_T(c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{סכום רימן:}$$

נותן קירוב לשטח הסגור בין גרף הפונקציה לציר ה-x, בקטע $[a, b]$, כאשר $n \rightarrow \infty$.

$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ היא חלוקה של הקטע $[a, b]$.

$\Delta x_i =$ אורך הקטע $[x_{i-1}, x_i]$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ נקודות שרירותיות כך ש

$$\Delta(T) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

הוא פרמטר החלוקה.

פונקציה אינטגרבילית – הגדרה:

פונקציה נקראת אינטגרבילית בקטע סגור $[a, b]$ אם קיים הגבול

$$I = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} \sigma_T(c_1, c_2, \dots, c_n) = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

(אם הוא בלתי תלוי בבחירת T ו- $\{c_i\}$, כל עוד פרמטר החלוקה שואף ל-0)

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$, חלוקה T של $[a, b]$, עם $\Delta(T) < \delta$, ונקודות ביניים $\{c_i\}$

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \right| < \varepsilon \quad \text{כך ש}$$

משפטים:

1. פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ היא אינטגרבילית, ויותר מזה:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

במקרה של פונקציה קבועה: $\int_a^b c dx = c(b-a)$

2. תכונות של פונקציה אינטגרבילית:

- פונקציה אינטגרבילית ב- $[a, b]$ בהכרח חסומה ב- $[a, b]$ (לא עובד הפוך).
- פונקציה רציפה למקוטעין היא אינטגרבילית. בפרט, כל פונקציה אלמנטרית היא אינטגרבילית בקטע סגור בו היא מוגדרת.

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \blacksquare$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \quad \blacksquare$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

3. תהי $f(x)$ פונק' אינטגרבילית ב- $[a,b]$, נניח ש- $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a,b]$ אז

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

4. אם $f(x) \leq g(x)$ שתי פונקציות אינטגרביליות אז $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

5. משפט ערך הביניים האינטגרלי: אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$, אז קיימת נקודה $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

6. המשפט היסודי של החזר"א: $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$, אז $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,t]$. $c \in [a,b]$ נקודה כלשהי, אפשר להגדיר פונקציה על $[a,b]$,

$$F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{נוסחה:}$$

7. משפט ניוטון-לייבניץ: תהי $f(x)$ פונק' רציפה ב- $[a,b]$, ותהי $F(x)$ הפונקציה הקדומה

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{של } f(x), \text{ אז: סימון לאגף הימיני: } F(x) \Big|_a^b$$

8. תהינה $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$, ולכל x בקטע מתקיים

$$m \leq f(x) \leq M, \quad g(x) \geq 0 \quad \text{אז} \quad m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx$$

אינטגרלים מוכללים:

אם $f(x)$ פונק' רציפה ב- $(-\infty, \infty)/(-\infty, a]/[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

(הגבול קיים וסופי \Leftarrow האינטגרל מתכנס), כנ"ל ל- $-\infty$.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

אינטגרל של פונקציה לא חסומה:

נניח ש- $f(x)$ מוגדרת ב- $[a, b)$, ולא חסומה ב- b , ונניח ש- $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a, b-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$). האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס, אם הגבול $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

קיים וסופי. בצורה דומה ניתן להגדיר $\int_a^b f(x)dx$ עבור פונק' מוגדרת ב- $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

אם $f(x)$ לא חסומה בנקודה פנימית c אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אם קיים $\int_c^b f(x)dx$ וגם $\int_a^c f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ואז:

מבחני השוואה:

אינטגרלים ידועים: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$, מתבדר עבור $\alpha \leq 1$

$$p \leq 1 \text{ מתבדר עבור } p > 1, \text{ מתכנס עבור } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

1. אם $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות לא שליליות ב- $[a, \infty)$ ואינטגרביליות ב- $[a, b]$, ומתקיים $f(x) \leq g(x)$, אז:

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} f(x) dx &\leq \int_a^{\infty} g(x) dx \quad \text{מתכנס גם מתכנס.} \\ \int_a^{\infty} g(x) dx &\leq \int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{מתבדר גם מתבדר.} \end{aligned}$$

2. מבחן המנה: אם $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות לא שליליות, וקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$$0 < L < \infty \quad \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ ו-} \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ מתכנסים ומתבדרים יחד.}$$

$$L = 0 \quad \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ מתכנס, } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ גם מתכנס.}$$

$$L = \infty \quad \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס, } \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ גם מתכנס.}$$

3. תהי $f(x)$ אינטגרבילית בכל $[a, b]$, כאשר a נקודה קבועה. אם $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס, אז

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס בהחלט (=מתכנס), אחרת, אומרים שהוא מתכנס בתנאי.}$$

(לא עובד הפוך)

4. מבחן Abel: $f(x)$ ו- $g(x)$ אינטגרביליות. אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס ו- $g(x)$ מונוטונית

$$\int_a^{\infty} (f(x) \cdot g(x)) dx \text{ מתכנס.}$$

5. מבחן דיריכלה: $f(x)$ ו- $g(x)$ אינטגרביליות. אם קיים M , $b \in [a, \infty)$ כך ש

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M, \quad g(x) \text{ מונוטונית, ו-} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \text{ אז } \int_a^{\infty} (f(x) \cdot g(x)) dx \text{ מתכנס.}$$

טורים

הגדרה:

סדרה של מספרים ממשיים. ניתן להגדיר את הסכום החלקי ה-n-י:

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} : S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

נקבל סדרה של הסכומים החלקים $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$ שהיא סדרה של מספרים ממשיים. אם קיים הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ (במובן הצר)}, \text{ נאמר שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס ל-} S. \text{ סימון: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

סוגי טורים:

1. טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ החל מ-n מסויים.

2. טור לייבניץ (סימנים מתחלפים) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, $a_n > 0$.

3. טור כללי.

4. טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ עם רדיוס התכנסות R, כלומר, הטור מתכנס עבור $|x| < R$.

(ייתכן $R = \infty$ או $R = 0$). תחום ההתכנסות הוא $(-R, R)$, בקצוות יש לבדוק כל מקרה בנפרד.

משפטים:

1. קריטריון Cauchy: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי, כך שלכל

$$n > N \text{ ולכל } k \text{ טבעי מתקיים: } |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים מתכנסים, c מספר ממשי. אז גם הטורים הבאים מתכנסים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n), \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$$

3. תנאי הכרחי להתכנסות של טור הוא $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

4. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט (=מתכנס).

5. טור לייבניץ מתכנס אם a_n מונוטונית יורדת ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

6. מציאת רדיוס התכנסות של טור חזקות: (Cauchy ו- D'Alembert)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$$

7. שימוש לטורי חזקות: תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה אינסוף פעמים ב- $(-R, R)$, אם קיים

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \quad \text{זו } |f^{(k)}(0)| < M \text{ לכל } k, \text{ קבוע } M > 0 \text{ כך ש-}$$

(מבוסס על טורי טיילור, כאשר השארית שואפת ל-0 כש- n שואף לאינסוף)

מבחני השוואה:

טורים ידועים: הטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$ מתכנס עבור $|q| < 1$

עבור $\alpha > 1$, מתכנס לכל β . עבור $\alpha < 1$, מתבדר לכל β

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

עבור $\alpha = 1$, מתכנס לכל $\beta > 1$ מתבדר לכל $\beta \leq 1$

עבור טורים חיוביים:

1. אם החל ממקום מסויים $a_n \leq b_n$ אז:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס \Leftarrow $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גם מתכנס.
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר \Leftarrow $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר גם מתבדר.

2. אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L$ ($b_n \neq 0$) אז:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד. $0 < L < \infty$
- אם $L = 0$ \Leftarrow $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גם מתכנס.
- אם $L = \infty$ \Leftarrow $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ גם מתכנס.

3. אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אז:

- $0 \leq L < 1 \Leftarrow$ הטור מתכנס.
- $L > 1 \Leftarrow$ הטור מתבדר.
- $L = 1 \Leftarrow$ אין לדעת.

4. מבחן השורש: אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ אז:

- $0 \leq L < 1 \Leftarrow$ הטור מתכנס.
- $L > 1 \Leftarrow$ הטור מתבדר.
- $L = 1 \Leftarrow$ אין לדעת.

5. מבחן האינטגרל: a_n מונוטונית יורדת, $f(x)$ מוגדרת, רציפה, ומונוטונית יורדת ב-

$[1, \infty)$, עבור $f(n) = a_n$ האינטגרל $\int_1^{\infty} f(x) dx$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

6. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = \infty$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

7. אם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ מתבדר, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.