פונקציות מרוכבות
צחי אבנור

Zachi Evenor
Email: z-evenor@lycos.com
Home Page: http://www.tau.ac.il/~bahatgal

פונקציות מרוכבות

(סוכם ע"י צחי אבנור לפי הרצאות של פרופ' דוד אנדלמן)

פונקציות מרוכבות – מושגי יסוד וגזירות (אנליטיות)

הגדרה: $f(z)=f(x+yi)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$: $x,y\in\mathbb{R}$, $x+iy=z\in\mathbb{C}$.

הגדרת הנגזרת: $f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. אם f גזירה בתחום מסוים, נאמר שהיא אנליטית בתחום.

תנאי קושי-רימן Cauchy-Riemann לגזירות (C-R):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{1}$$

משפט: פונקציה מרוכבת גזירה בנקודה $z_0\in\mathbb{C}$ אם ורק אם u ו v דיפרנציאביליות שם ומתקיימים בנקודה זו תנאי קושי-רימן (מש' 1).

משפט: משוואות קושי-רימן (מש' 1) מתקיימות אם ורק אם $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*}=0$ כאשר $z^*=\overline{z}=x-iy$.

תנאי קושי-רימן בקואורדינטות פולאריות: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}}$.

מספר פונקציות אלמנטריות יסודיות (ואנליטיות):

$$z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$$
$$e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$
$$\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\cos(z)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$$

זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(z\pm w)=\sin(z)\cos(w)\pm\cos(z)\sin(w)$$
$$\cos(z\pm w)=\cos(z)\cos(w)\mp\sin(z)\sin(w)$$
$$2\cos^2(w)=1+\cos(2w)$$
$$2\sin^2(w)=1-\cos(2w)$$
$$2\sin(w)\cos(w)=\sin(2w)$$
$$\sin(z)\pm\sin(w)=2\sin\left(\frac{z\pm w}{2}\right)\cos\left(\frac{z\mp w}{2}\right)$$
$$\cos(z)+\cos(w)=2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$$
$$\cos(z)-\cos(w)=-2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

משפט הפונקציות ההרמוניות: תהי $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אנליטית במישור המרוכב. אזי הפונקציות $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הן פונקציות הרמוניות, כלומר – הן מקיימות את משוואת לפלס לשני מימדים: $\nabla^2v=v_{xx}+v_{yy}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v^2}{\partial y^2}=0$ $\qquad$ $\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}=0$.

טענה: אם $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ אנליטית אזי $(\vec{\nabla}u)\bullet(\vec{\nabla}u)=0$.

אינטגרלים מרוכבים

הגדרה: אינטגרל מרוכב על מסילה $z(t)=x(t)+iy(t)$ $\gamma:$ נתון ע"י $\oint_\gamma f(z)dz=\int_a^b f\left(z(t)\right)z'(t)dt$.

אינטגרל על מעגל ברדיוס r סביב a: נבצע פרמטריזציה באופן הבא $z=a+re^{i\theta},\ dz=ire^{i\theta}d\theta$.

משפט קושי לפונקציות אנליטיות: יהי R תחום בו הפונקציה $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ אנליטית ותהי C לולאה שהיא והפנים שלה מוכלים ממש ב R. אזי:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz=0} \tag{2}$$

מסקנה: אינטגרל על פונקציה אנליטית בתחום לא תלוי במסלול אלא רק בנקודות הקצה.

משפט מוריירה: אם $\oint_C f(z)dz=0$ על כל מסילה בתחום R אזי f אנליטית ב R.

משפט אינטגרל קושי: תהי הפונקציה $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ אנליטית בתחום R ותהי C לולאה שהיא והפנים שלה מוכלים ממש ב R. כמו כן, תהי $z_0\in R\subseteq\mathbb{C}$ נקודה שכלואה בתוך של הלולאה C, אזי:

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=2\pi i\cdot f(z_0)} \tag{3}$$

מסקנה 1: הערך של $f(z_0)$ שווה לממוצע של הפונקציה על הלולאה שמקיפה אותו.

מסקנה 2: אם $f(z)$ קבועה על לולאה, אזי לכל z_0 שכלוא ע"י הלולאה, $f(z_0)$ שווה לאותו קבוע.

כלומר, אם f קבועה על מסילה אזי היא גם קבועה על הפנים שלה.

מסקנה 3: זהו בעצם חוק גאוס של פוטנציאל חשמלי. הפוטנציאל בתוך קליפה מוליכה קבוע ושווה לערך הפוטנציאל על פני הקליפה.

הכללת משפט אינטגרל קושי: תהי הפונקציה $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ אנליטית בתחום R ותהי C לולאה שהיא והפנים שלה מוכלים ממש ב R. תהיינה $\alpha_1,...,\alpha_n\in R\subseteq\mathbb{C}$ נקודות שכלואות בתוך של הלולאה C, אזי:

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(z_i)}{\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)}\right)} \tag{4}$$

מקרה פרטי עבור 2 משתנים: $\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz=2\pi i\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha-\beta}+\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\right)=2\pi i\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$.

משפט ליוביל: אם פונקציה אנליטית חסומה בכל המישור אזי היא קבועה בכל המישור.

משפט הנגזרת של קושי: תהי $f:R\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, אזי:

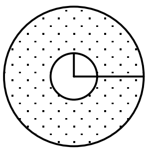
$$\boxed{\left(\left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z_0}\right)=f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\left[\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right]} \tag{5}$$

פיתוחי טיילור ולורן

פיתוח טיילור: סביב z_0, יהי R מרחק נקודת הסינגולרית הקרובה ביותר ל z_0 כך ש $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z-z_0|<R$. אזי ניתן לפתח אותה לטור טיילור: $\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}dz'\right)}$.

קוטב - נקודה סינגולרית מבודדת: נקודה בודדת (לא חלק מקו או חתך) שבה $f(z)$ לא אנליטית.

פיתוח לורן: סביב z_0, יהיו R ו r מרחקים מנקודות סינגולריות כך ש $f(z)$ אנליטית בטבעת $r<|z-z_0|<R$. נניח ש z_0 נקודה סינגולרית בודדת של $f(z)$ אזי פיתוח לורן שלה נתון ע"י



$$\boxed{\begin{array}{l} f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots \\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \qquad : \qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}dz' \end{array}} \tag{6}$$

שארית (Residue): המקדם a_{-1} בפיתוח לורן של $f(z)$ סביב z_0 נקרא ה"שארית" ומסומן $Res(z_0)=a_{-1,z_0}$.

מספר פיתוחי טיילור חשובים סביב האפס ורדיוסי ההתכנסות שלהם:

$$\begin{array}{llll} e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} & \left(|z|<\infty\right) & \sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} & \left(|z|<\infty\right) \\ \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n & \left(|z|<1\right) & \cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} & \left(|z|<\infty\right) \end{array} \tag{7}$$

מספר פיתוחי לורן חשובים סביב האפס וטבעות ההתכנסות שלהם:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{z(1-z)}=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n=\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots. & \left(0<|z|<1\right) \\ \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{1}\!/_{z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots & \left(1<|z|<\infty\right) \end{array} \tag{8}$$

חשבון שאריות Calculus of Residues

משפט השארית: תהי C מסילה סגורה שמקיפה מספר סופי של N נקודות סינגולריות בודדות $\{z_1,\ldots,z_N\}$ של $f(z)$, אזי האינטגרל המסלולי על מסילה זו שווה ל

$$\boxed{\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{n=1}^{N}Res\left(z_n\right)=2\pi i\cdot\sum_{n=1}^{N}a_{-1,z_n}} \tag{9}$$

טענה שימושית: אם לפונקציה $f(z)$ יש קוטב פשוט (כלומר, מסדר ראשון) ב z_0 אזי

$$Res(z_0)=a_{-1,z_0}=\lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)f(z) \tag{10}$$

משפט: תהי $f(z)$ פונקציה עם קוטב מסדר m ב z_0 אזי אם נסמן $p(z)=(z-z_0)^m\cdot f(z)$ נקבל ש:

$$Res(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{p(z)dz}{(z-z_0)^m}=\frac{1}{(m-1)!}p^{(m-1)}(z_0) \tag{11}$$

משפט: תהי $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ כאשר p ו q אנליטיות ב z_0 וכן $q'(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$, $p(z_0)\neq 0$. אזי:

$$Res_f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{p(z)+p'(z)(z-z_0)}{q'(z)}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{12}$$