גירסה 1.00 – 12.4.2004

גדירות בתחשיב הפסוקים – תיאוריה והדגמה

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

גדירות

בהינתן קבוצת פסוקים Σ, Σ **מגדירה** את קבוצת ההשמות המספקות אותה. עבור קבוצת פסוקים Σ, קבוצת המודלים של Σ מסומנת ב- $Ass(\Sigma)$ ומוגדרת $Ass(\Sigma)=\{z \mid z\vDash\Sigma\}$.

בהינתן קבוצת השמות K, האם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה את K, כלומר $Ass(\Sigma)=K$? אם קיימת קבוצת פסוקים כזו נאמר כי K **גדירה.** אם קיימת קבוצת פסוקים סופית שמגדירה את K נאמר ש- K **גדירה באופן סופי**.

הוכחת אי גדירות

סכימת הוכחת אי גדירות של קבוצת השמות K:

1. נניח בשלילה כי קבוצת ההשמות K גדירה על ידי קבוצת הפסוקים Σ.
2. נבחר קבוצת פסוקים מפורשת Σ_A שעבורה ידוע מהי קבוצת ההשמות המספקת אותה.
   נחפש $M(\Sigma_A)$ כזה שהשמה הנמצאת בה בהכרח לא נמצאת בקבוצה K. (אם כל ההשמות ב- K מקיימות כלל מסויים, נבחר קבוצת ההשמות שלא תקיים אותו).
3. נראה כי $\Sigma\bigcup\Sigma_A$ לא ספיקה, על ידי $M(\Sigma_A)\bigcap M(\Sigma)\equiv M(\Sigma_A)\bigcap K=\phi$:
   מניחים שיש השמה כלשהי המספקת את $\Sigma\bigcup\Sigma_A$: $z\vDash\Sigma\bigcup\Sigma_A$. מכאן ההשמה z מספקת את Σ וגם את Σ_A. אם היא מספקת את Σ, הרי שהיא שייכת ל- K. אם היא מספקת את Σ_A, הרי שהיא שייכת ל- $M(\Sigma_A)$, אולם החיתוך של שתי קבוצות אלו הוא קבוצה ריקה, ולכן לא קיימת השמה המספקת את שתיהן.
4. נראה כי $\Sigma\bigcup\Sigma_A$ ספיקה באמצעות משפט הקומפקטיות. נראה שכל תת קבוצה סופית $D\subseteq\Sigma\bigcup\Sigma_A$ היא ספיקה. נמצא השמה z_D השייכת ל- K כך ש: $z_D\vDash D$. (מסתמכים בבניית z_D על האינדקס המקסימלי המופיע גם ב- D וגם ב- Σ_A).
   נגדיר לרוב $D_\Sigma=D\bigcap\Sigma$ וגם $D_A=D\bigcap\Sigma_A$. מתקיים $D=D_A\bigcup D_\Sigma$. נבנה את z_D כך שתספק בדיוק את D_A. נשים לב ש- D_A,D_Σ שתיהן קבוצות סופיות.
5. מ-3 ומ-4 אנו מקבלים סתירה: Σ לא קיימת, ולכן K לא גדירה.

<u>דוגמא להוכחת אי גדירות</u>

תהי K קבוצת כל ההשמות הנותנות 1 למספר אינסופי של אטומים.

נניח שקבוצת הפסוקים Σ מגדירה קבוצה זו.

נביט בקבוצה $\Sigma_A = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. קבוצה זו גדירה. $M(\Sigma_A) = \{z_F\}$.

נראה כי $\Sigma \bigcup \Sigma_A$ לא ספיקה. נניח שיש השמה כלשהי המספקת את $\Sigma \bigcup \Sigma_A$: $z \vDash \Sigma \bigcup \Sigma_A$. מכאן ההשמה z מספקת את Σ וגם את Σ_A. אם היא מספקת את Σ, הרי שהיא שייכת ל- K, ונותנת 1 למספר אינסופי של אטומים. אם היא מספקת את Σ_A, הרי שהיא שייכת ל- $M(\Sigma_A)$, ומכאן נותנת 1 ל-0 אטומים. קיבלנו סתירה, ולכן לא קיימת השמה המספקת את שתי הקבוצות.

נראה כי $\Sigma \bigcup \Sigma_A$ ספיקה באמצעות משפט הקומפקטיות. נראה שכל תת קבוצה סופית $D \subseteq \Sigma \bigcup \Sigma_A$ היא ספיקה.

נגדיר $D_\Sigma = D \bigcap \Sigma$ וגם $D_A = D \bigcap \Sigma_A$. מתקיים $D = D_A \bigcup D_\Sigma$. נשים לב ש- D_A, D_Σ שתיהן קבוצות סופיות.

תהי השמה z_D השייכת ל- K שתוגדר בצורה הבאה:

$$z_D = \begin{cases} 0 & p_i \in D_A \\ 1 & else \end{cases}$$

z_D מספקת את D_A, מכיוון שכך היא הוגדרה. כל איבר ב- D_A הוא מהצורה $\neg p_i$, וההשמה נותנת לו 0, ולכן ההשמה מספקת את D_A.

כמו כן, מכיוון ש- D_A היא קבוצה סופית, והשמה מוגדרת על אינסוף אטומים, הרי ש- z_D מספקת אינסוף אטומים, ולכן $z_D \in K$.

מסקנה: $\Sigma \bigcup \Sigma_A$ ספיקה.

קיבלנו סתירה: $\Sigma \bigcup \Sigma_A$ ספיקה וגם $\Sigma \bigcup \Sigma_A$ לא ספיקה, ולכן Σ לא קיימת.