גרפים

גרף $G(V,E)$ V- קדקדי הגרף, E – זוגות קדקדים (צלעות).
גרף מכוון- יש משמעות 12 21.
מולטי גרף – אותה צלע יכולה להופיע מספר פעמים.
גרף לינארי לא מולטי גרף (במכוון יתכן 12 21)
מטריצת סמיכות $a_{ij}=\{1$ if vi is next to vj
{0 If not
במולטי גרף אם צלע מופיעה פעמיים נכתוב 2 במקום 1
שתי קשתות בעלות אותו זוג קודקודי קצה נקראות **קשתות מקבילות**.

ערכיות (דרגה) של קודקוד X בגרף G – זה מספר הצלעות המכילות את קדקד X.

$\delta(G)$ -ערכיות מינימלית ב G , $\Delta(G)$
ערכיות מקסימלית ב G
לולאה תורמת 2 לערכיות
גרף ללא לולאות וללא קשתות מקבילות נקרא **גרף פשוט**.

משפט: $\Sigma\, degx=2|E|$
סכום דרגות בגרף הוא תמיד זוגי
ערכיות בגרף מכוון $\Sigma\, deg_+V = \Sigma\, deg_-V = |E|$ -deg_+V מספר הצלעות היוצאות ל V.
deg_-V- מספר הצלעות הנכנסות ל V.

דרגה ממוצעת בגרף – $2|E|/|V|$

מסלול -מסילה: רשימה של קדקדים, שבו אף קשת לא חוזרת יותר מפעם אחת. אם בנוסף אף קודקוד פנימי לא חוזר יותר מפעם אחת, נקרא **מסלול פשוט.**
גרף קשיר הוא גרף שבו בין <u>כל</u> 2 קדקדים יש מסילה.
גרף $G'=\langle V',E'\rangle$ נקרא **תת-גרף** של הגרף $G=\langle V,E\rangle$
אם $E'\subseteq E$ $V'\subseteq V$. שימו לב כי בהגדרה זאת דורשים ש - G' יהיה גרף, כלומר, אם e קשת ב – G', אז שני קודקודי הקצה שלה חייבים להיות ב – V'.
מרכיב – של גרף G הוא תת גרף קשיר של G שהוא מקסימלי ביחס להכלה (לא ניתן להוסיף צלעות או קדקדים ועדיין לקבל תת גרף קשיר).

בגרף מכוון : **קשיר חלש** – אם הגרף הלא מכוון המושרה קשיר.
קשיר חזק – <u>לכל</u> 2 קדקדים XY יש מסילה $X\text{-->}Y$
קשיר בינוני – לכל 2 קדקדם XY יש מסילה מ X ל Y או מ Y ל X.

Cn – מעגל פשוט באורך n.
Pn – מסילה פשוטה באורך n-1. (n קדקדים)
K_n - הגרף השלם. מספר הקשתות בו הוא $\binom{n}{2}$.
$K_{s,t}$ - גרף דו-צדדי שלם הוא גרף דו צדדי שבו קיימות כל הצלעות האפשריות בין V_1 ל- V_2. אם $|V_1|=s$ ו - $|V_2|=t$.
$|E(Ks,t)|=s*t$.

גרף דיסקרטי – גרף בלי צלעות (רק קדקדים)
הגרף המשלים $G^*=(V,E^*)$ E^* = כל הצלעות שאינן ב E
איזומורפיזם $G1$, $G2$ איזומורפיים זה לזה אם קיימת פונקציה
$F: v1 \to v2$ על וחח״ע, כך שלכל x,y ∋ v1 ,
xy ∋ E1 אמ״מ FxFy ∋ E2
(נבדוק מסי' צלעות, קדקדים וגודל מעגלים)
אוטומורפיזם= איזומורפיזם מגרף לעצמו
גרף r-רגולרי לכל קדקד ערכיות r $\delta(G)=\Delta(G)$

משפט לחיצת הידיים – קבוצת שיש בה n>=6 יש 3 שכל שנים מהם לחצו או לא לחצו ידיים.
שיטה: צובעים את הצלעות בשתי צבעים , נראה שבטוח נוצר משולש במבע אחד.

מסילה גאודית – בין 2 קדקדים x,y בגרף G היא המסילה הקצרה ביותר בין x ו y.
המרחק d א) אין סוף אם x,y במרכיבים שונים.
ב) אורך המסילה הגאודטית בין y, x

משפט- d הוא **מטריקה**
א)d=>0 d=0 אמ״מ y=x
ב) d (x,y) =d (y,x)
ג) לכל 3 קדקדים x,y,z d (x, z) =< d(y, z) + d (x,y)

הקוטר- d (G) אורך המסילה הגאודטית הארוכה ביותר ב G

גרף זוגי (דו חלקי) – אם אפשר לחלק את קבוצת קדקדיו ל 2 קבוצות זרות, לשון אחרת : ניתן לצבוע את קדקדיו ב 2 צבעים כך שאין 2 קדקדים מאותו צבע סמוכים זה לזה (דו צביע).
משפט – Cn גרף זוגי אמ״מ n זוגי.
(משפט קונינג) תנאי הכרחי ומספיק – גרף זוגי G אינו מכיל תת גרף שהוא מעגל באורך אי זוגי.
משפט TURAN מספר מקסימלי של צלעות בגף בעל n קוקדים חסר משולשים הוא $[n\backslash 2]\,[n\backslash 2]$ מספר זה מתממש אך ורק בגרף $K\,[n\backslash 2]\,[n\backslash 2]$
גרף הוא **דו חלקי** אמ״מ לא קיים בו מעגל באורך אי זוגי
בכל גרף דו חלקי סכום הערכיות בכל צד שווה
גרף הוא דו צביע אמ״א אינו מכיל מעגל באורך אי זוגי

מסילת אוילר – מסילה בגרף המכילה את כל הצלעות פעם אחת
מעגל אוילר – מסילת אוילר סגורה
משפט אוילר – תנאי הכרחי ומספיק לכך שמולטיגרף קשיר יהיה מעגל אוילר הוא שלכל קדקדי הגרף ערכיות זוגית.
משפט - תנאי הכרחי ומספיק לכך שגרף קשיר יהיה מסילת אוילר הוא שמסי' קדקדי הגף שערכיותם אי זוגית הוא לכל היותר 2 (התחלה-סוף).

משפט : אם מסי' קדקדים בעלי ערכיות אי זוגית במולטי גרף קשיר היא 2K אזי G ניתן לכיסוי ע״י K מסילות שלשום 2 מהם אין צלע משותפת ואף אחת לא מכילה צלע יותר מפעם אחת.

מעגל המילטון - מעגל פזוט ב G המכיל את כל קדקדי G.
בגרף המילטון עם N קדקדים אורך המעגל הוא N
מסילת המילטון – מסילה פשוטה ב G המכילה את כל קדקדי G.
תנאים לכך שאין מסילת המילטון :
א) בגרף זוגי K m,n תנאי הכרחי לקיום מעגל המילטון בעל N קדקדים שחורים ו M אדומים הוא N=M .
ב) תנאי הכרחי לקיום מסילת המילטון - |M – N|=< **1**

משפט DIRAC – אם בגרף בעל N=>3 קדקדים מתקיים $\delta(G)$ => **N/ 2** אז יש ב G מעגל המילטון
מפשט- בגרף שלם יש מעגל המילטון.
משפט אורה- אם בגרף בעל N=>3 קדקדים לכל 2 קדקדים לא סמוכים X Y מתקיים degY+degx >=N אז יש ב G מעגל המילטון .

עצים

עץ – גרף קשיר חסר מעגלים
יער- גרף חסר מעגלים
קדקד קצה – קדקד שערכיותו 1
קדקד חתך – קדקד שסילוקו מגדיל את מסי' המרכיבים.
גשר- צלע שסילוקה מגדיל את מסי' המרכיבים.
עץ טריויאלי – קדקד יחיד.

משפט – בעץ כל צלע היא גשר וכל קדקד שאינו קדקד קצה הוא קדקד חתך.
משפט – אם בגרף קשיר G כל קדקד שאינו קצה הוא קדקד חתך אז G עץ
משפט - אם בגרף קשיר G כל צלע היא גשר אז G עץ.

משפט- בכל עץ לא טריוואלי יש לפחות 2 קדקדי קצה
משפט – בכל עץ לא טריוויאלי T יש לפחות $\Delta(T)$ קדקדי קצה.
משפט – בעץ בעל N קדקדים יש בדיוק **1** – N צלעות.
משפט – גרף קשיר בעל N קדקדים ו **1** – N צלעות הוא עץ.

כל זוג מהטענות הבאות גורר שהגרף עץ (ואת השלישית)
1. הגרף קשיר
2. הגרף חסר נעגלים
3. מסי' הצלעות ב G הוא **1** – N (N מסי' הקדקדים)

עץ פורש בגרף G – תת גרף של G המכיל את כל קדקדי G והוא עץ.
משפט- בכל גרף קדיר יש עץ פורש.
מספר העצים הפורשים ב Kn הוא n^(n-2)
נוסחה לחישוב מסי' עצים פורשים :
J(G)=J(G\e) + J(Goe)

גרף ממושקל – גרף בו לכל צלע e מוצמד מספר w(e) משקל של e
$w(G)= \Sigma\, w(e)$

המרכזיות של V – המרחק ביהו לבין הקדקד הרחוק ממנו ביותר
e (V)=max d(u,v)
הרדיוס - r(G)=min e(V)
קדקדי מרכז- הקדקדים שהמרכזיות שלהם שווה לרדיוס.
משפט- המרכז של כל עץ לא טריויאלי הוא קדקד יחיד או 2 קדקדים סמוכים.

הנגזרת – T בעל יותר מ 2 קדקדים, T' מתקבל ע״י סילוק כל קדקדי הקצה

משפט - תנאי הכרחי ומספיק לכך שרשימה של N מספרים טבעיים dn……d1. תהיה רשימת ערכיות קדקדי עץ הוא
$\Sigma\, di=2(n-1)$

גרף מסומן – גרף שקדקדיו מסומנים בסימונים שונים.
משפט קיילי - מספר העצים המסומנים בעלי N קדקדים הוא n^(n-2)

משפט- קופיץ – מס העצים המסומנים G כך ש V(G)=V והצמצומם של G ל Vi הוא Gi (|Vi|=ni) הוא
n1*n2 ….. np*n^(p-2)

פרופר – מעץ עם N קדקדים בונים וקטור באורך n-2 כך שקדקד שערכיותו D יופיע D-1 פעמים בווקטור.

גרפים מישוריים

גרף G הוא מישורי אם ניתן לשכנו במישור באופן ששום 2 צלעות לא תחתחנה בנקודה שאינה קדקד משותף להם.

משפט אוילר – בכל שיכון מישורי של גרף קשיר מתקיים
V – E + F = 2
F- מסי' תחומים , E- מס צלעות V מס קדקדים.

מסקנה- מס תחומים בשיכון מישורי של גרף קשיר אינו תלוי בשיכון.
משפט- בשיכון מישרי של גרף עם C מרכיבי קשירות מתקיים
V – E + F = C+ 1

אם בשיכון מישורי של גרף מישורי לכל מדינה יש בדיוק N צלעות אז
2E=FN F=2E/N
E = (N(V-2))/(N-2) , בפרט עבור N=3 E=3V-6

מסקנה – אם לכל מדינה יש לפחות 3 צלעות אז E<=3V-6

בפיאון משוכלל מתקיימות כל התכונות הבאות:
1. לכל הקדקדים אותה ערכיות
2. לכל הדפנות אותו מסי' צלעות
3. כל הדפנות חופפות זו לזו
4. כל הזויות המרחביות חופפות

בפיאון **משוכלל למחצה** מתקיימות רק תכונות 1 ו 2 .
אם בפיאון משוכלל למחצה, לכל קדקד ערכיות R ולכל הדפנות Q צלעות אז: F=2E/Q V=2E/R 1/R+1/Q>1/2

גרף דואלי G* - בכל תחום של G נקבע קדקד של G* , 2 קדקדים X Y ב G* יהיו סמוכים אמ״מ לתחומים בהם נמצאים X Y יש צלע משותפת E והצלע XY=E* תחתוך את E.
G=G** V=F* E=E* F=V*

בכל פאון – E>=6 F,V>=4 V>=F/2 +2 F>=v/2 +2

	R	Q	V	E	F
טטראדר -	3	3	4	6	4
קוביה	3	4	8	12	6
אדיקאדר	3	5	20	30	12
אוקטאדר	4	3	6	12	8
איקוסאדר	5	3	12	30	20