תורת המשחקים

מרצה:פרופסור רון הולצמן*

11 בדצמבר 2003

תוכן עניינים

חלק I
משחקים דמויי שחמט

1 מאפיינים של משחקים דמויי שחמט

- יש 2 שחקנים
- השחקנים משחקים לסירוגין, כ"א בתורו בוחר מסע
- אחד השחקנים, הנקרא לבן, הוא המתחיל. השני נקרא שחור.
- כל שחקן, בכל עת שעליו לשחק, מודע לכל המסעים שנבחרו עד אותה עת.

- בחירת המסעים ע"י 2 השחקנים קובעת לחלוטין את מהלך המשחק.
- בכל מצב, כללי המשחק קובעים את אחד מ-2 הדברים הבאים:
  - השחקן שתורו לשחק צריך לבחור מסע, והכללים קובעים מהם המסעים המותרים לו.
  - המשחק הסתיים והכללים קובעים אם זה נצחון ללבן, נצחון לשחור או תיקו.
- מותר שבמשחק תיתכן סידרה אינסופית של מסעים. במקרה זה כל סידרה כזו ממויינת לאחת האפשרויות: ניצחון ללבן, ניצחון לשחור או תיקו.

1.1 דוגמאות למשחקים דמויי שחמט:

- שחמט
- דמקה
- איקס-מיק-דריקס

1.2 משחק לדוגמא:

כל מסע שחל כל שחקן הוא מספק בקבוצה $\{1,2,3\}$. המשחק מתנהל באופן הבא:

- לבן בוחר מסע, אחריו שחור בוחר מסע שונה מזה שבחר לבן. נסמן ב-a את המספר שטרם נבחר.
- אם $a\in\{1,2\}$ השחקן שבחר 0 הפסיד.
- אם $a=0$, לבן שוב בוחר מסע השונה ממסעוהקודם.
- נסמן ב-b את סכום כל המסעים שנבחרו מודולו 3.
- אם $b=0$ התוצאה תיקו
  - $b=1$ ניצחון ללבן
  - $b=2$ נצחון לשחור.

1.3 עץ משחק

נגדיר באופן מתמטי את המושג עץ משחק של משחק דמוי שחמט.
עץ משחק של משחק דמויי שחמט מכיל את המרכיבים הבאים:

- עץ T (גרף קשיר ללא מעגלים, יתכן אינסופי)
- שורש r (שהוא אחד הקודקודים של T)
- נחשוב על עץ T כעץ מכיוון השורש החוצה.
- קבוצת הצלעות היוצאת מקודקוד v החוצה, היא קבוצת המסעי מאותו קודקוד.
- הקצוות של המסעים האלה הם הקודקודים העוקבים ל-v.
- קודקוד שאין לו קודקודים עוקבים נקרא קודקוד קצה.
- כל קודקוד שאיננו קודקוד קצה ומרחקו מהשורש זוגי הוא קודקוד החלטה של לבן.
- כל קודקוד שאיננו קודקוד קצה ומרחקו מהשורש אי-זוגי הוא קודוד החלטה של שחור
- <u>תחרות</u> היא מסילה בעץ שתחילתה בשורש ומקיימת את אחד מהדברים הבאים:
  - מסתיימת בקודקוד קצה
  - אינסופית
- נתונה חלוקה של קבוצת כל התחרויות במשחק לשלוש קבוצות: נצחון ללבן, נצחון לשחור או תיקו.

1.4 תכסיס

תכסיס של שחקן במשחק זוהי תוכנית פעולה האומרת לשחקן מה לעשות בכל מצב של המשחק שבו עליו לקבל החלטה.

- באופן מתמטי, תכסיס של שחקן זוהי פונקציה הבוחרת לכל קודקוד החלטה של אותו שחקן את אחד המסעים מאותו קודקוד.
- בהנתן בחירה של תכסיס לכל קודקוד, התחרות נקבעת לחלוטין וכך גם התוצאה.

1.5 משפט פון נוימן

יהיה G משחק דמוי שחמט שבוכל התחרויות הן סופיות ובאורך חסום אזי אחד משלושת המצבים הבאים נכון על G:

1. ללבן יש תכסיס נצחון
2. לשחור יש תכסיס נצחון
3. לשני השחקנים יש תכסיס תיקו.

הגדרות:
יהיה G משחק דמוי שחמט המתואר על ידי עץ משחק r, נסמן ב G_r והוא ------
עומק של קודקוד - האורך המקסימלי של תחרות בתת משחק המתחיל באותו הקודקוד. עומקו של הקודקוד v מסומן ב $depth(v)$.
הוכחה:
נגדיר פונקציה f מקבוצת הקודקודים של עץ המשחק אל הקבוצה $\{w, b, d\}$.
ההגדרה תהי באינדוקציה על עומק הקודקוד v שעליו מגדירים.

עבור קודקוד v מעומק 0 נגדיר את $f(v)$ להיות התוצאה באותו קודקוד קצה. כעת נתבונן בקודקוד v שאיננו קודקוד קצה.
נשים לב שלכל קודקוד u עוקב ל v מתקיים: $depth(u) < depth(v)$.
לכן, בבואנו להגדיר את $f(v)$, לפי הנחת האינדוקציה, $f(u)$ מכבר מוגדר לכל u עוקב ל v.
נגדיר את $f(v)$ בשני המקרים האפשריים:

א. כאשר v קודקוד החלטה של לבן, נגדיר:

- אם קיים עוקב u של v שעבורו $f(u) = w$, אזי $f(v) = w$.
- אם אין כזה, אבל קיים עוקב u של v שעבורו $f(u) = d$, אזי $f(v) = d$.
- אחרת, $f(v) = b$.

ב. כאשר v קודקוד החלטה של שחור, נגדיר:

- אם קיים עוקב u של v שעבורו $f(u) = b$ אזי $f(v) = w$
- אם אין כזה, אבל קיים עוקב u של v שעבורו $f(u) = d$, אזי $f(v) = d$.
- אחרת, $f(v) = w$.

כעת נוכיח שלכל קודקוד v:

- אם $f(v) = w$ אז בתת המשחק G_v יש ללבן תכסיס נצחון.
- אם $f(v) = b$ אז בתת המשחק G_v יש לשחור תכסיס נצחון.
- אם $f(v) = d$ אז בתת המשחק G_v יש לשני השחקנים תכסיסי תיקו.

זה יגרור את נכונות המשחק כאשר ניקח את v להיות שורש העץ של G.
<u>ההוכחה באינדוקציה על העומק של v</u>
אם $depth(v)=0$ הפתרון מיידי מההגדרה.
כעת נתבונן בקודקוד v שאיננו קודקוד קצה.
נניח ש-v קודקוד החלטה של לבן.

- אם $f(v)=w$:
  - הנה תכסיס הנצחון של לבן בתת המשחק G_v:
    - בקודקוד v בחר מסע המוביל לקודקוד u שעבורו $f(u)=w$.
    - בכל קודקוד החלטה של לבן בתת המשחק G_u, שחק לפי תכסיס נצחון בתת המשחק G_u (הקיים לפי הנחת האינדוקציה). ובכל קודקוד החלטה אחר של לבן ב G_v בחר מסע באופן שרירותי.
- אם $f(v)=b$:
  - הנה תכסיס נצחון של שחור בתת משחק G_v:
    - לפי הגדרת f, לכלל עוקב של v מתקיים $f(u)=b$, ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, יש לשחור תכסיס נצחון ב G_u. התכסיס שמבטיח נצחון לשחור ב G_v אומר לו לשחק בכל אחד מהתת משחקים האלו G_u לפי תכסיס נצחון שלו באותו תת משחק.
- אם $f(v)=d$
  - הנה תכסיס תיקו ללבן בתת משחק G_v:
    - בקודקוד v, בחר מסע המוביל לקודקוד u שעבורו $f(u)=d$.
      - בכל קודקוד החלטה של לבן בתת המשחק G_u, בחר מסע לפי תכסיס תיקו של לבן בתת המשחק G_u (קיים לפי הנחת האינדוקציה).
    - בכל קודקוד החלטה אחר של לבן ב G_v, בחר מסע באופן שרירותי.
  - הנה תכסיס תיקו לשחור בתת המשחק G_v.
    - בכל קודקוד החלטה של שחור בתת המשחק G_u כאשר u עוקב של v שעבורו $f(u)=d$, בחר מסע לפי תכסיס תיקו של שחור בתת המשחק G_u (קיים לפי הנחת האינדוקציה).
    - בכל קודקוד החלטה של שחור בתת המשחק G_u כאשר u עוקב של v שעבורו $f(u)=b$, בחר מסע לפי תכסיס נצחון של שחור בתת המשחק G_u.

בזאת סיימנו לטפל במקרה ש-v הוא קודקוד החלטה של לבן. הטיפול במקרה ש-v הוא קודקוד החלטה של שחור הוא אנלוגי ובזאת סיימנו את הוכחת המשפט.

2 משחקים קומבינטוריים

יהיו $m,n\in N$, לא שניהם אחד.
המשחק $G_{m,n}$, משוחק על לוח משבצות כמצוייר במחברת, ולו n עמודות ו m שורות, והמשבצת השמאלית התחתונה אינה קיימת.
כל שחקן בתורו (לבן מתחיל) בוחר במשבצת של הלוח שטרם נמחקה ומוחק אותה יחד עם כל הרביע שמימינה ומעליה.
שחקן שבתורו לשחק הלוח כבר ריק, מפסיד.
טענה: אם $n=m>1$, אז ללבן יש תכסיס נצחון במשחק $G_{m,n}$.
הוכחה: הנה תכסיס נצחון ללבן:
במסע הראשון, בחר את המשבצת שנמצאת אלכסונית מיד מעל המשבצת החסרה. מכאן והלאה, השב על כל מסע של היריב במסע סימטרי לו ברכיב האחר של הלוח שנותר.
משפט: לכל n,m טבעיים שלא שניהם אחד, יש ללבן תכסיס נצחון במשחק $G_{m,n}$.
הוכחה: לפי משפט פון-נוימן, או שללבן יש תכסיס נצחון או שלשחור יש תכסיס נצחון. נניח בשלילה שלשחור יש תכסיס נצחון (המשחק אינו מכיל תיקו).

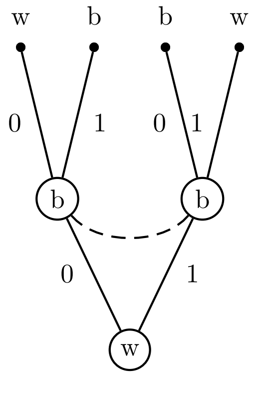
התכסיס אומר לו בפרט איך להגיב על כל מסע ראשון אפשרי של לבן. בפרט, יש בו תגובה הולמת על מסע ראשון של לבן הבוחר את המשבצת הימנית העליונה. אזי, הטכסיס של לבן הבוחר במסע הראשון שלו את אותה תגובה הולמת, ומכאן והלאה מחקה את תכסיס הנצחון של שחור, ולכן התכסיס הזה מהווה תכסיס נצחון של לבן. זו סתירה ולכן ללבן יש תכסיס נצחון.

חלק II
משחקים אחרים

3 פרמטרים נוספים למשחק

נרחיב את מחלקת המשחקים שבהם אנו מטפלים במספר מובנים:

1. צעדי גורל -
   (א) נרשה שבמהלך המשחק יהיו מצבים שבהם המסע לא נבחר על ידי אחד השחקנים אלא על ידי הגרלה.
   (ב) לכל מצב כזה ההסתברות לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה נתונה וידועה.
   (ג) נניח תמיד שההגרלות עבור צעדי גורל שונים במשחק הן בלתי תלויות זו בזו.
   (ד) צעד גורל יופיע בתיאור המשחק על ידי עץ קקודקוד שאיננו קודקוד החלטה של אף שחקן ושלמשאים היוצאים ממנו מיוחסות הסתברויות.
2. ידיעה לא שלמה
   (א) נרשה מצבים שבהם שחקן צריך לקבל החלטה מבלי שהוא יודע את כל מה שקרה במהלך התחרות עד אותו רגע.
   (ב) בפרט, זה יאפשר לנו לטפל במשחקים שבהם השחקנים מקבלים החלטות בו זמנית.
   (ג) דוגמא: עץ או פלי/זוג או פרט
      i. לבן ושחור בוחרים כל אחד 0 או 1 בו זמנית.
      ii. לבן מנצח אם שניהם בחרו אותו דבר. אחרת, שחור מנצח.
      iii.



   (ד) קבוצת ידיעה של שחקן היא קבוצה של קודקודי החלטה שלו, כך שכאשר המשחק מגיע לאיזשהו קודקוד מאותה קבוצה, השחקן יודע רק שהמשחק הגיע לקודקוד מאותה הקבוצה אבל לא יודע לאיזה מהם, והוא נדרש להחליט על סמך ידיעה זו.
      i. לכל קבוצת ידיעה I של שחקן נתונה קבוצת ידיעה L_I של החלטות אפשריות באותה קבוצת ידיעה.
      ii. לכל קודקוד $v \in I$ נתונה התאמה חד-חד ערכית בין הקבוצה L_I לבין המסעים האפשריים בקודקוד v.
      iii. בפרט, זה מחייב שאם $u, v \in I$ עבור קבוצת ידיעה I, אז מספר המסעים האפשריים ב-u שווה למספר המסעים האפשריים ב-v.

iv. קבוצות הידיעה של שחקן מבצעות חלוקה של קבוצת קודקודי ההחלטה שלו. גם קודקוד בודד יכול להוות קבוצת ידיעה.

v. משחק עם ידיעה שלמה הוא משחק שבו כל קבוצות הידיעה הן קודקודים בודדים.

3. תועלות

(א) לכל תחרות במשחק ולכל שחקן נייחס ערך מספרי שהוא התועלת שאותו שחקן מפיק מהשתתפות במשחק כאשר המשחק התנהל לפי אותה תחרות.

(ב) כדי להעריך מנקודת ראותו של שחקן תוצאה של משחק התלויה בצעדי גורל, עלינו לדעת מה התועלת שהוא מפיק לא רק מתחרות נתונה, אלא גם מהתפלגות הסתברויות על תחרויות.

(ג) ההנחה שלנו (המבוססת על תורת התועלת שאותה לא נלמד כאן) היא שהתועלת של שחקן מהתפלגות שווה לתוחלת התועלת לפי אותה התפלגות.

4. מספר סופי כלשהו של שחקנים.

(א) נרשה שמספר השחקנים יהיה מספר טבעי n כלשהו. הסדר שבו השחקנים משחקים איננו מוגבל בצורה כלשהי.

4 משחק n שחקנים בצורה רחבה

מתואר על ידי המרכיבים הבאים:

- קבוצה סופית לא-ריקה N של שחקנים. בדר"כ, $N = \{1, 2, ..., n\}$.
- עץ T עם: (עץ המשחק)
  - קבוצת קודקודים V (מצב אפשרי)
  - קבוצת צלעות E (המסעים)
  - שורש r (המצב ההתחלתי).
  - לכל קודקוד x שאיננו קודקוד קצה, נסמן ב-E_x את קבוצת המסעים האפשריים בקודקוד x.
- חלוקה $(V_0, V_1 ..., V_n)$ של קבוצת הקודקודים שאינם קודקודי קצה. עבור $i \in N$, V_i הוא קבוצת קודקודי ההחלטה של שחקן i ואילו V_0 היא קבוצת הקודקודים המסה נבחר על ידי הגרלה.
- לכל $i \in N$ נתונה חלוקה Π_i של V_i, המקיימת: אם $x, y \in I \in \Pi$ אז $|E_x| = |E_y|$.
  - לכל $i \in N$ ולכל קבוצת ידיעה $I \in \Pi_i$ נתונה קבוצה L_I של החלטות אפשריות בקבוצת הידיעה I. לכל $x \in I$ מתקיים $|E_x| = |L_I|$. לכל $x \in I$ נתונה התאמה חד חד ערכית ועל $l_x : E_x \to L_I$
.
- לכל קודקוד $x \in V_0$ נתונה התפלגות הסתברויות P_x על E_x.
- לכל תחרות בעץ T ולכל שחקן $i \in N$ נתונה התועלת של שחקן i מהתחרות, שהי מספר ממשי u_i. בצורה כזו, מתאימה לתחרות n-יה $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$. n-יה כזו נקראת וקטור תשלומים.
  - משחק n שחקנים בצורה רחבה נקראה סופי אם עץ המשחק הוא סופי.
- תכסיס של שחקן i במשחק n שחקנים בצורה רחבה זוהי פונקציה σ המתאימה לכל קבוצת ידיעה $\Pi \in 1$ החלטה $\sigma(I) \in L_I$.

בדוגמא המצויירת על הלוח, התכסיסים של 1 הם: a,h-b,h-,c,h-a,i-b,i-c,i
אבל, a, h a, i הם תכסיסים שקולים, כמו גם b, h b, i.
התכסיסים של 2 הם:

$$\begin{matrix} d,f & d,g \\ e,f & e,g \end{matrix}$$

בהנתן n-יה של תכסיסים $(\sigma_1\sigma_2,...\sigma_n)$ של n השחקנים, נקבעת התפלגות הסתברויות על התחרויות במשחק, ולכן נקבעת התפלגות על התשלום שכל שחקן יקבל, וניתן לייחס לכל שחקן א תוכלת התשלום שלו לפי אותה התפלגות.

1\2	d,f	d,g	e,f	e,g
a	$(\frac{11}{4},\frac{1}{4})$			
b				
c,h				
c,i				

נניח למשל ששחקן 1 משחק a ושחקן 2 משחק d, f. אז, בהסתברות $\frac{1}{4}$ התוצאה תהיה $(1,0)$, בהתברות $\frac{1}{4}$ התוצאה תהיה $(0,-1)$ ובהסתברות חצי התוצאה תהיה $(5,1)$.

$$\frac{1}{4}(1,0)+\frac{1}{4}(0,-1)+\frac{1}{2}(5,1)=\left(\frac{11}{4},\frac{1}{4}\right)$$

5 משחק n שחקנים בצורה תכסיסית

- קבוצה סופית לא-ריקה N של שחקנים, בדר"כ $N=\{1,2,3\ldots n\}$.
- לכל שחקן $i\in N$, קבוצה לא-ריקה S_i שהיא קבוצת התכסיסים של שחקן i.
- לכל שחקן $i\in N$, פונקצית תשלום π_i.

$$\pi_i : S_1\times S_2\times\ldots\times S_n\to\mathbb{R}$$

- בכתיב מקוצר, אנחנו כותבים משחק כזה בצורה $G=(N,S_1,S_2\ldots,S_n,\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$.
- במקרה $n=2$, אם קבוצות התכסיסים הן סופיות, נתאר משחק כזה ע"י טבלה שבה כל שורה מתאימה לתכסיס של 1, כל עמודה מתאימה לתכסיס של 2, ובמשבצת המתאימה לזוג תכסיסים נתון, מופיעים שני מספרים: (התשלום של 2, התשלום של 1).

5.1 משחק סכום אפס.

משחק 2 שחקנים בצורה רחבה הוא משחק סכום אפס אם לכל תחרות במשחק מתאים וקטור תשלומים מהצורה $(a,-a)$.

משחק 2 שחקנים בצורה תכסיסית הוא סכום אפס $\pi_2=-\pi_1$. במקרה זה, נשתמש בכתיב מקוצר - $G=(S,T,\pi)$ כאשר $S=S1,\ T=S_2,\ \pi=\pi_1$. כאשר מציגים משחק כזה בטבלה, יופיע בכל משבצת מספר אחד, הוא התשלום לשחקן 1, זה שבוחר שורה.

<u>דוגמא:</u>

8	3
1	5

הטבלה מתארת משחק 2 שחקנים סכום-אפס.

- שחקן 1 יכול להבטיח לעצמו לפחות 3 ע"י בחירת השורה הראשונה, ויכול להבטיח לעצמו לפחות 1 ע"י בחירת השורה השניה. לכן, אם ירצה רמת בטחון מקסימלית, יבחר בשורה הראשונה.
- שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 8 ע"י בחירת העמודה הראשונה ויכול להבטיח שישלם לכל היותר 5 ע"י בחירת העמודה השניה. לכן, אם ירצה רמת בטחון מקסימלית, יבחר בעמודה השניה.
- כעת נשים לב: אם שחקן 1 מביא בחשבון שזה מה ששחקן 2 עושה, אז כדאי לו לבחור בשורה השניה. כעת כדאי לשחקן 2 לבחור בעמודה הראשונה וכו'. אבל האיוקין מיוצר באוסטרליה, ואוסטרליה מיושבת על ידי גנבים.

5.1.1 רמת בטחון מקסימלית

יהי $G=(S,T,\pi)$ משחק 2 שחקנים סכום אפס בצורה תכסיסית.
רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 1 היא $v_1 = \max_{s\in S}\min_{t\in T}\pi(s,t)$ (בתנאי שהמינימום וה-מקסימום בהגדרה קיימים). תכסיס $s\in S$ שעבורו מתקבל המקסימום נקרא תכסיס מקסמין.
רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 2 היא $v_2 = \min_{t\in T}\max_{s\in S}\pi(s,t)$ (בתנאי שהמקסימום וה-מינימום בהגדרה קיימים). תכסיס $t\in T$ שעבורו מתקבל המינימום נקרא תכסיס מינמקס.

- דוגמה: הטבלה שלמעלה.
  - השורה הראשונה היא תכסיס מקסמין, $v_1=3$.
  - העמודה השניה היא תכסיס מינמקס, $v_2=5$

- דוגמא:

2←מקסמין	5	3	2
-2	6	-2	-1
-2	-2	4	0
$v_2=2, v_1=2$	6	4	מינמקס↑2

5.1.2 ערך של משחק

יהי $G=(S,T,\pi)$ משחק 2 שחקנים סכום אפס בצורה תכסיסית. מספר ממשי v נקרא ערך של G אם לשחקן 1 יש תכסיס $s\in S$ כך שלכל $t\in T$, $\pi(s,t)\geq v$ ולשחקן 2 יש תכסיס $t\in T$ כך שלכל $s\in S$, $\pi(s,t)\leq v$.
הערה: אם למשחק יש ערך אז הוא יחיד.
טענה: יהי G משחק 2 שחקנים סכום אפס בצורה תכסיסית שעבורו v_1, v_2 מוגדרים היטב. אזי,

1. $v_1\leq v_2$
2. אם $v_1<v_2$ אז ל-G אין ערך.
3. אם $v_1=v_2$ אז ל-G יש ערך והוא הערך המשותף של v_1, v_2.

הוכחה:

1. יהי s תכסיס מקסמין של שחקן 1 ויהי t תכסיס מינמקס של שחקן 2. $v_1\leq\pi(s,t)\leq v_2$, מההגדרות של s,t.
2. נניח ש $v_1<v_2$ ולמשחק G יש ערך v.
   (א) מכיוון ששחקן 1 יכול להבטיח לו לפחות v, ו-v_1 רמת הבטחון המקסימלית שלו, מתקיים $v\leq v_1$. מ
   (ב) מכיוון ששחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר v, ו-v_2 רמת הבטחון המקסימלית שלו, מתקיים $v\geq v_2$.
   (ג) שני האי שוויונות שקיבלנו סותרים את $v_1<v_2$.
3. נניח $v_1=v_2$. אזי המספר $v=v_1=v_2$ מקיים את ההגדרה של ערך, ולכן למשחק יש ערך והוא v.

5.1.3 ערך של משחקים דמויי שחמט.

נחזור לדיון על משחקים דמויי שחמט. כל משחק כזה ניתן לתיאור כמשחק 2 שחקנים, סכום אפס בצורה רחבה כאשר מיחסים לתחרויות וקטורי תשלום באופן הבא:

-
  - נצחון ללבן - $(1,-1)$.
  - נצחון לשחור - $(-1,1)$.
  - תיקו - $(0,0)$.

נשים לב ש-

1. אם ללבן יש תכסיס נצחון אז למשחק יש ערך 1.
2. אם לשחור יש תכסיס נצחון אז למשחק יש ערך והוא 1-.
3. אם לשני השחקנים יש תכסיסי תיקו אז למשחק יש ערך והוא 0.

לכן, ניסוח שקול למשפט פון-נוימן הוא כדלקמן:

> יהי G משחק דמוי שחמט שבו אורך התחרויות חסום אזי ל-G יש ערך.

5.1.4 משפט פון נוימן, בנוסח רחב יותר:

> יהי G משחק 2 שחקנים סכום-אפס בצורה רחבה, שהוא סופי ובעל ידיעה שלימה אזי ל-G יש ערך.

<u>הוכחה (בראשי פרקים)</u>

- כמו בנוסח המקורי, תהליך ההוכחה הוא באינדוקציה לאחור.
- הטענה שמוכיחים באינדוקציה היא שלכל תת משחק G_v המתחיל בקודקוד v יש ערך.

1. בקודקוד קצה, טריוויאלי.
2. אם v קודקוד החלטה של שחקן 1, ערך תת המשחק G_v הוא המקסימום בין ערכי התת משחקים G_u, u עוקב של v.
3. אם v קודקוד החלטה של שחקן 2, ערך התת-משחק G_v הוא המינימום בין ערכי התת משחקים G_u, u עוקב של v.
4. אם v קודקוד גורל, ערך התת-משחק G_v הוא הממוצא המשוקלל של ערכי התת-משחקים G_u, u עוקב של v, כאשר המשקלות הם ההסתברויות.

<u>דוגמא</u>:

8	3	$\frac{1}{2}$
1	5	$\frac{1}{2}$

. ראינו שלמשחק הזה אין ערך ($v_1 = 3, v_2 = 5$).

- נניח ששחקן 1 בוחר להתנהג כך: הוא מטיל מטבע ומחליט מראש ש:
  - אם המטבע נופלת על עץ הוא משחק שורה ראשונה
  - אם המטבע נופלת על מספר הוא משחק שורה שניה.
- מה מבטיח לו התכסיס הזה?
  - אם שחקן 2 יבחר בעמודה הראשונה, התשלום הוא: $\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 4.5$
  - אם שחקן 2 יבחר בעמודה השניה, התשלום הוא: $\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4$
- לכן התכסיס הזה מבטיח לשחקן 1 לפחות 4 (גדול מ-3).

5.2 הרחבת העירוב של משחק

ראינו את הדברים הבאים:

- רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 1 היא $v_1 = 3$.
- רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 2 היא $v_2 = 5$.
- אם שחקן 1 בוחר שורה ראשונה בהסתברות $\frac{1}{2}$ ושורה שניה בהתברות $\frac{1}{2}$ אז שחקן 1 משיג רמת בטחון של 4.
- כעת נניח ששחקן 1 בוחר שורה ראשונה בהסתברות p ושורה שניה בהסתברות $1-p$ ($0 \le p \le 1$).
- נראית איזה רמת בטחון זה מבטיח לשחקן 1, כפונקציה של p. (גרף וחישוב על הלוח)

- כעת נניח ששחקן 2 בוחר עמודה ראשונה בהסתברות q ועמודה שניה בהסתברות $1-q$ ונראה איזה רמת בטחון זה מבטיח לשחקן 2 כפונקציה של q. (עוד גרף על הלוח).

יהי $G=(S,T,\pi)$ משחק 2 שחקנים סכום אפס שבוקבוצות התכסיסים S,T הן סופיות. $S=\{s_1,s_2,\dots s_m\},T=\{t_1,t_2,\dots t_n\}$.

- <u>תכסיס מעורב</u> של שחקן 1 זוהי m-יה $P=(p_1,,p_2,\dots p_m)$ המקיימת

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}p_i &= 1\\ p_i &\geq 0(i=1,\dots m)\end{aligned}$$

.

  - קבוצת כל התכסיסים המעורבים של שחקן 1 תסומן על ידי S^*.
  - תכסיס בקבוצה המקורית S יקרא גם <u>תכסיס טהור</u>. נשים לב שהתכסיס הטהור s_i שקול לתכסיס המעורב שלו הסתברות 1 במקום ה-i ו-0 בשאר המקומות.
  - במובן הזה, מתקיים $S\subseteq S^*$.

- <u>תכסיס מעורב</u> של שחקן 2 זוהי n-יה $q=(q_1,\dots q_n)$ המקיימת

$$\sum_{i=1}^{n}q_i=1$$

$$q_i\geq 0$$

.

  - קבוצת כל התכסיסים המעורבים של שחקן 2 תסומן על ידי T^*.
  - כמו במקרה של שחקן 1, נקרא לתכסיסים המקוריים גם תכיסים טהורים וניתן לראותם כתת קבוצה של T^*.

- לכל $(p,q)\in S^*\times T^*$ נגדיר את התשלום $\pi^*(p,q)$ להיות תוחלת התשלום π לפי ההסתברויות p,q, כלומר,

$$\pi^*(p,q)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_iq_j\pi(s_i,t_j)$$

.

  - נשים לב שאם המטריצה A מסדר $m\times n$ מתארת את פונקצית התשלום π, אז

$$\pi^*(p,q)=pAq^\top$$

- המשחק שהגדרנו, $G^*=(S^*,T^*,\pi^*)$ נקרא <u>הרחבת העירוב</u> של המשחק G. G^* הוא בעצמו משחק שני שחקנים סכום-אפס. המושגים שהכנסנו בעבר חלים גם על G^*.

  - רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 1 במשחק G^* היא

$$v_1^*=\max_{p\in S^*}\min_{q\in T^*}\pi^*(p,q)$$

    * ניתן לראות שזה מוגדר היטב.

– רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 1 במשחק G^* היא

$$v_2^* = \min_{q\in T^*}\max_{p\in S^*}\pi^*(p,q)$$

- אם למשחק G^* יש ערך, נסמן אותו ע"י v^*. המספר v^* יקרא גם ערך של G בתכסיסים מעורבים.
  - תכסיס מעורב של שחקן 1 המבטיח לו לקבל לפחות v^* נקרא <u>תכסיס אופטימלי</u>.
  - תכסיס מעורב של שחקן 2 המבטיח לו לשלם לכל היותר v^* <u>נקרא תכסיס אופטימלי</u>.
- ברור שמתקיים: $v_1 \le v_1^* \le v_2^* \le v_2$.
- למשחק G^* חש ערך אך ורק אם $v_1^* = v_2^*$.

5.2.1 משפט המינימקס

משפט המינימקס הוכח על ידי פון נוימן ב-1928.

יהי G משחק 2 שחקנים סכום-אפס שבו קבוצות התכסיסים הטהורים הן סופיות. אזי, להרחבת העירוב G^* של G יש ערך.

ניסוחים שקולים:

- לכל משחק המקיים את תנאי המשפט מתקיים $v_1^* = v_2^*$, כלומר,

$$\max_{p\in S^*}\min_{q\in T^*}\pi^*(p,q) = \min_{q\in T^*}\max_{p\in S^*}\pi^*(p,q)$$

בלשון מטריצות - לכל מטריצה ממשית A מסדר $m\times n$ מתקיים:

$$\max_p \min_q pAq^\top = \min_q \max_p pAq^\top$$

כאשר המקסימום הוא על

$$p_i \ge 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1, p\in\mathbb{R}^m$$

והמינימום הוא על

$$q_i \ge 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1, q\in\mathbb{R}^n$$

<u>הכנות להוכחה</u>

1. קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת קמורה אם לכל $x,y\in A$ ולכל $0\le t\le 1$ מתקיים $tx+(1-t)y\in A$. (לכל שתי נקודות ב-A, הקטע בינהן כולו ב-A).
2. תהינה $x^1,x^2,\ldots,x^m\in\mathbb{R}^n$. <u>צירוף קמור</u> של $x^1,x^2,\ldots,x^m$ זוהי נקודה מהצורה

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m t_i x_i \\
\sum_{i=1}^m t_i &= 1 \\
t_i \ge 0 &\qquad i=1,\ldots,m
\end{aligned}$$

3. קבוצת כל הצירופים הקמורים של $x^1, x^2, \ldots, x^m$ נקראת <u>הקמור</u> של $x^1, x^2, \ldots, x^m$ ומסומנת על ידי

$$\mathrm{Conv}\{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$$

ניתן להראות שהקמור של $x^1, x^2, \ldots, x^m$ זוהי הקבוצה הקמורה הקטנה ביותר המכילה את $x^1, x^2, \ldots, x^m$.

4. עבור $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ <u>המכפלה הפנימית</u> שלהם היא

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

5. יהי $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי הקבוצה

$$H_{a,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle = \alpha\}$$

נקראת <u>על-מישור</u> ב-$\mathbb{R}^n$.

6. העל-מישור $H_{a,\alpha}$ מגדיר שני חצאי מרחב,

$$\begin{aligned} H^-_{a,\alpha} &= \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle < \alpha\} \\ H^+_{a,\alpha} &= \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle > \alpha\} \end{aligned}$$

7. תהינה $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $H_{a,\alpha}$ על מישור ב $\mathbb{R}^n$. אנחנו אומרים כי $H_{a,\alpha}$ הוא <u>על מישור מפריד חזק</u> בין K ל-L אם

$$K \subseteq H^-_{a,\alpha} \ , \quad L \subseteq H^+_{a,\alpha}$$

8. <u>משפט ההפרדה:</u> תהינה $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קמורות, סגורות, לא ריקות וזרות, וכן נניח ש-K חסומה. אזי קיים על-מישור ב-R^n המפריד חזק בין K ל-L.

- הוכחה בראשי פרקים:
  - נמצא שתי נקודות, $x \in K, y \in L$ שעבורן מתקבל המינימום:

    $$\min_{x \in K, y \in L} d(x, y)$$

    d הוא המרחק האוקלידי.
    * נשים לב ש-$d(x, y) > 0$ (נובע מהזרות).
  - נחבר את הנקודות x, y בקטע ונעביר על-מישור ניצב לקטע הזה דרך אחת הנקודות הפנימיות שלו.
  - נבדוק ש-$H_{a,\alpha}$ מפריד חזק בין K ל-L. המרחק בין w ל-y קצר מהמרחק בין x ל-y.
    * w הוא האנך ...?

5.2.2 הוכחת משפט המינימקס

- נתון משחק שני שחקנים סכום-אפס $G = (s, t, \pi)$ עם קבוצת תכסיסים טהורים סופית. עלינו להראות שלהרחבת העירוב G^* של G יש ערך. במילים אחרות - עלינו להראות שלשחקן 1 יש תכסיס מעורב המבטיח לו לפחות v_2^*.
- נניח, בדרך השלילה, כי שלשחקן 1 אין תכסיס מעורב כזה.
- נספרר את תכסיסי השחקנים:

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, s_2, s_3 \ldots s_m\} \\ T &= \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \end{aligned}$$

- תהי A המטריצה מסדר $m \times n$ המייצגת את G. נסמן ב $u^1, u^2, \ldots, u^m$ את שורות המטריצה A.
- אם שחקן 1 משחק תכסיס מעורב $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ הוא מבטיח לעצמו תשלום של לפחות

$$\min_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i u^i \right)_j$$

  – לכן, מהנחת השלילה, נובע שלכל תכסיס מעורב $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ של שחקן 1,

$$\min_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i u^i \right)_j < v_2^*$$

- נגדיר שתי תת-קבוצות של $\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Conv}(u^1, u^2, \ldots, u^n) \\ L &= \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n | y_j \ge v_2^*, j = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

  – הטענה שאמרנו לעיל אומרת בדיוק ש-K ו-L זרות.
  – כמו כן, הקבוצות K, L מקיימות את כל שאר התנאים במשפט ההפרדה. לכן, לפי המשפט, קיים על-מישור $H_{a,\alpha}$ המפריד בין K ל-L. כלומר, מתקיים:
    * לכל $x \in K$, $\langle a, x\rangle < \alpha$
    * לכל $y \in L$, $\langle a, y\rangle > \alpha$
  – נבדוק שכל הרכיבים של הוקטור a הם אי-שליליים.
    * נניח שלא, כלומר קיים $1 \le j \le n$ כך ש-$a_j < 0$.
      · אזי נתבונן בוקטורים $y \in L$ מהצורה $u_j \ge v_2^*$, $y = (v_2^*, \ldots, v_2^*, y_j, v_2^*, \ldots, v_2^*)$.
      · כאשר y_j גדל לאינסוף, המכפלה הפנימית של הוקטור $\langle a, y\rangle$ קטנה ל-$-\infty$, בסתירה לכך שהיא צריכה להשאר גדולה מ-α. לכן,
    · לכן, כל רכיבי a הם אי-שליליים, ולפחות אחד מהם חיובי, כי $a \neq 0$, ובפרט $\sum_{j=1}^{n} a_j > 0$ לכן הוקטור $\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}} \cdot a$ מהווה תכסיס מעורב של שחקן 2.
    · אם שחקן 2 משחק את התכסיס המעורב הזה, הוא מבטיח שישלם לכל היותר

$$\max_{1 \le i \le m} \left\langle \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}} \cdot a \;,\; u_i \right\rangle$$

לכן, התכסיס המעורב הזה מבטיח לשחקן 2 שישלם לכל היותר

$$\max_{1\leq i\leq m} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \left\langle a, u^i \right\rangle < \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \cdot \alpha$$

המכפלה הפנימית קטנה מ-α עבור כל i.

- אם נראה ש-$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \cdot \alpha < v_2^*$, אז נקבל סתירה להגדרת v_2^* , ובכך נסיים.
  * לפי ההפרדה, $\langle a, (v_2^*, v_2^*, \ldots, v_2^*) \rangle > \alpha$.
- כלומר,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) \cdot v_2^* > \alpha$$

וזה שקול למה שרצינו להראות.