גירסה 1.01 – 25.3.2004

גירסה 1.00 – 2.10.2004

לוגיקה

ניר אדר

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

תחשיב הפסוקים

יסודות

<u>הגדרה פורמלית לתחשיב הפסוקים</u>

אותיות השפה הינן $\{\wedge,\vee,\rightarrow,\neg,(,),T,F\}$ וכן $\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$. נגדיר את **קבוצת הפסוקים** באינדוקציה.

בסיס: $B=\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\bigcup\{T,F\}$, כאשר $\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ הינה קבוצת הפסוקים האטומיים.

קבוצת הפעולות הינה: $F=\{f_\vee,f_\wedge,f_\neg,f_\rightarrow\}$ והפעולות מוגדרות בצורה הבאה:

$$f_\wedge(\alpha,\beta)=(\alpha\wedge\beta)\quad f_\vee(\alpha,\beta)=(\alpha\vee\beta)\quad f_\rightarrow(\alpha,\beta)=(\alpha\rightarrow\beta)\quad f_\neg(\alpha)=(\neg\alpha)$$

קבוצת הפסוקים הינה $X_{B,F}$ עבור B,F הנ"ל.

<u>הגדרה</u>: הקבוצה $WFF_{\{F,\rightarrow\}}$ שהיא תת קבוצה של WFF תוגדר בצורה הבאה:

בסיס: $B=\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\bigcup\{F\}$. סגור: $F=\{f_\rightarrow\}$

<u>עץ יצירה</u>

עץ שמתאר איך נבנה הפסוק מהאטומים על ידי הפעולות ייקרא **עץ יצירה**. כל צומת של העץ:

- אם הצומת הוא עלה הוא מסומן באטום.
- אם הצומת מסומן ב- $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$ אז יש לו שני בנים.
- אם הצומת מסומן ב- $\neg$ אזי יש לו בן אחד.

<u>אלגוריתם לבניית עץ יצירה עבור פסוק α</u>

1. α הוא השורש של העץ.
2. <u>לכל</u> צומת שאינו אטום, מבצעים:

א. מוחקים את הסוגריים החיצוניים (אם אין כאלו ñ האלגוריתם נכשל).

ב. <u>אם</u> הסימן הראשון הוא $\neg$ זהו הקשר הראשי והסיפא שאחריו הוא הבן היחיד של הצומת הנוכחי.

ג. <u>אחרת</u>: סורקים משמאל לימין, תוך ספירת יתרון הסוגריים השמאליים על הימניים. בפעם הראשונה בה מגיעים לשוויון (מלבד בנקודת ההתחלה) ñ עוצרים:

- <u>אם</u> הסימן שמייד אחרי נקודת העצירה אינו קשר דו-מקומי, האלגוריתם נכשל.

- <u>אחרת</u>:
  i. הסימן שמייד אחרי נקודת העצירה הוא הקשר המרכזי.
  ii. הביטוי שמשמאל לנקודת העצירה הוא הבן השמאלי של הצומת הנוכחי.
  iii. הביטוי שמימין לקשר המרכזי הוא הבן הימני של הצומת הנוכחי.

האלגוריתם עוצר כאשר כל הצמתים שטרם טופלו מכילים סימן אטום יחיד.

ערך האמת של פסוק

בהינתן השמה $z:\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\rightarrow\{0,1\}$ **ערך האמת** של הפסוק δ מחושב באופן הבא:

אם δ פסוק אטומי אזי $\overline{z}(\delta)=z(\delta)$. אם $\delta=T$ אזי $\overline{z}(\delta)=1$. אם $\delta=0$ אזי $\overline{z}(\delta)=0$.

אם $\delta=(\alpha\circ\beta)$ עבור $\circ\in\{\vee,\wedge,\rightarrow\}$ אזי $\overline{z}(\delta)=TT_{\circ}\left(\overline{z}(\alpha),\overline{z}(\beta)\right)$ אחרת אם $\delta=(\neg\alpha)$ אזי $\overline{z}(\delta)=TT_{\neg}\left(\overline{z}(\alpha)\right)$.

$TT_{\vee}$:

α	β	$(\alpha\vee\beta)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$TT_{\neg}$:

α	$(\neg\alpha)$
0	1
1	0

$TT_{\rightarrow}$:

α	β	$(\alpha\rightarrow\beta)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$TT_{\wedge}$:

α	β	$(\alpha\wedge\beta)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

<u>סימון</u>: מסמנים $z\vDash\alpha$ אם $\overline{z}(\alpha)=1$ ואומרים z **מספקת** את α.

משפט הקריאה היחידה

א. יהי α פסוק. אם קיימים פסוקים β_1,β_2 וקשר דו מקומי a כך שמתקיים $\alpha=(\beta_1 a\beta_2)$ וכן קיימים פסוקים γ_1,γ_2 וקשר דו מקומי b כך שמתקיים $\alpha=(\gamma_1 b\gamma_2)$ אז $\beta_1=\gamma_1$, $\beta_2=\gamma_2$ וגם $a=b$.

ב. יהי α פסוק. אם קיים פסוק β כך ש-$\alpha=(\neg B)$ אז לכל פסוק β' המקיים $\alpha=(\neg\beta')$ מתקיים $\beta=\beta'$, וכן לא קיימים פסוקים γ,δ וקשר דו מקומי a כך שמתקיים $\alpha=(\gamma a\delta)$.

נוסח שני למשפט: לכל פסוק חוקי α מתאים עץ יצירה יחיד.

<u>הערה</u>: עץ היצירה הוא יחיד לכל פסוק. לעומת זאת לכל פסוק יכולות להיות סדרות יצירה רבות.

<u>משפט הגדרת ערך האמת</u>

בהינתן פסוק α והשמה z לאטומים, ערך האמת של α לפי ההשמה z הוא יחיד.

<u>סדר קדימויות בין קשרים</u>

1) $\neg$ 2) $\wedge,\vee$ 3) $\rightarrow$ נשמיט סוגרים בכל מקום שזה לא פוגע במשמעות.

<u>מערכת קשרים שלמה</u>

<u>הגדרה</u>: נאמר **שמערכת קשרים היא שלמה** אם לכל טבלת אמת יש פסוק בקשרים אלו המממש אותה.

<u>משפט</u>: מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים הינה שלמה.

<u>הוכחת מערכת קשרים שלמים</u>: 1. הוכחה ישירה. 2. התבססות על מערכת שלמה ידועה.

<u>מערכות שלמות ידועות</u>: $\{\neg,\vee\},\{\neg,\wedge\},\{\rightarrow,F\}$

<u>תכונות תחשיב הפסוקים</u>

1. יהי α פסוק. בין כל סוגרים מהצורה $(...)$ יש לפחות קשר אחד.
2. בין כל שני אטומים קיים קשר.

<u>משפט</u>

לכל פסוק α ולכל שתי השמות z_1,z_2 אם לכל אטום p_i שמופיע ב- α מתקיים $z_1(p_i)=z_2(p_i)$ אזי $\overline{z}_1(\alpha)=\overline{z}_2(\alpha)$.

<u>מושגי יסוד</u>

1. ספיקות: פסוק α ייקרא **ספיק** אם קיימת השמה z **כך** ש- $z\vDash\alpha$.
2. טאוטולוגיה: פסוק α ייקרא **טאוטולוגיה** אם לכל השמה z מתקיים $z\vDash\alpha$.
3. סתירה: פסוק α ייקרא **סתירה** אם לכל השמה z מתקיים $z\nvDash\alpha$.

<u>טענה</u>: α סתירה אמ"מ $\neg\alpha$ טאוטולוגיה.

<u>נכון / לא נכון</u>:

1. אם $\alpha\vee\beta$ טאוטולוגיה אזי α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה – לא נכון.
2. אם $\alpha\vee\beta$ סתירה אז α סתירה וגם β סתירה – נכון.

הוכחת טאוטולוגיה

דרכים להוכיח שפסוק α הוא טאוטולוגיה:

1. טבלת אמת: עוברים על כל ההשמות האפשריות עבור האטומים בפסוק ורואים שעבור כל אחת מהן הוא מקבל 1.
2. מחפשים מה ההשמה צריכה לקיים על מנת שלא תספק את α ומוכיחים שלא קיימת השמה כזו.

הגדרה: נאמר ש- α **גורר לוגית** את β ונסמן $\alpha \vDash \beta$ אם כל השמה שמספקת את α מספקת את β.

דוגמא: $(p_0 \wedge p_1) \vDash p_0$.

טענה: $\alpha \vDash \beta$ אמ"מ $\alpha \to \beta$ היא טאוטולוגיה.

אבחנות:

1. אם α טאוטולוגיה - $\alpha \vDash \beta$ אזי β טאוטולוגיה.
2. אם β סתירה ו- $\alpha \vDash \beta$ אזי α סתירה.
3. אם α סתירה, אזי לכל β מתקיים $\alpha \vDash \beta$.

הרחבת המושגים לקבוצת פסוקים

1. השמה z **מספקת קבוצת פסוקים** X אם z מספקת את כל הפסוקים ב- X. לכל $\alpha \in X$, $z \vDash \alpha$. מסמנים: $z \vDash X$.
2. פסוק α **נובע לוגית מקבוצת פסוקים** X אם לכל השמה z שמספקת את X מתקיים $z \vDash \alpha$. דוגמא: $\{\neg p_0 \to \neg p_1, p_1\} \vDash p_0$.
3. **קבוצת פסוקים** X **היא ספיקה** אם קיימת השמה המספקת את X.

נכון/לא נכון:

1. אם כל פסוק ב- Σ ספיק, אז Σ ספיקה. לא נכון. למשל: $\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$.
2. אם $\Sigma \vDash \alpha$ אז לכל $\beta \in \Sigma$ מתקיים $\beta \vDash \alpha$. לא נכון.
3. בהינתן קבוצת פסוקים Σ ופסוק α, אם $\Sigma \cup \{\alpha\}$ ספיקה אז $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ לא ספיקה.
   לא נכון, לדוגמא: $\Sigma = \phi$ ו- $\alpha = p_0$.

הגדרה: נאמר שפסוקים α, β **שקולים לוגית** ונסמן $\alpha \equiv \beta$ אם לכל השמה z מתקיים $\bar{z}(\alpha) = \bar{z}(\beta)$. כלומר, $a \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \vDash \beta$ וגם $\beta \vDash \alpha$.

טענה: $\alpha \equiv \beta$ אמ"מ $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

הסימון $\models$: עבור השמה – מספק, עבור פסוקים – גורר לוגית.

דוגמאות לשימושים בנביעה לוגית

1. לכל פסוקים α,β,γ, אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\beta$ וגם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\neg\beta$ אזי $\gamma\models\alpha$.
2. לכל זוג פסוקים α,γ אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\alpha$ אזי $\gamma\models\alpha$.
3. לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α,β, אם $X\bigcup\{\alpha\}\models\beta$ וגם $X\bigcup\{\neg\alpha\}\models\beta$ אזי $X\models\beta$.
4. לכל שתי קבוצות Σ_1,Σ_2, אם $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$ אזי לכל פסוק α, אם $\Sigma_1\models\alpha$ אזי $\Sigma_2\models\alpha$.

תכונות של פסוקים

1. כל פסוק בשפה מורכב מאטום בודד, או שהוא מתחיל ב-')' ונגמר ב-'('.
2. בכל פסוק α מספר הסוגריים הימניים שווה למספר הסוגריים השמאליים.

הגדרת **רישא**: פסוק α ייקרא רישא (prefix) של β אם α,β סדרות סימנים כך ש- $\alpha=\alpha_1...\alpha_n$ ו- $\beta=\beta_1...\beta_k$ וגם $n\le k$ וגם לכל $1\le i\le n$ מתקיים $a_i=b_i$. α הוא **רישא ממש** של β אם α הוא רישא של β וגם $n<k$.

3. לכל פסוק β, אם α הוא רישא ממש לא ריקה של β, אז מספר הסוגרים השמאליים ב- α גדול ממש ממספר הסוגרים הימניים ב- α.

הצבות

הרעיון: נתון פסוק α ואנו מעוניינים להחליף כל פסוק אטומי ב- α בפסוק כלשהו.

בהינתן פונקצית הצבה $s:\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to WFF$ נגדיר באינדוקציה את הפסוק $sub(\alpha,s)$ שהוא הפסוק המתקבל מ- α על ידי החלפת כל מופע של p_i ב-$s(p_i)$.

בסיס: $\alpha=T, sub(\alpha,s)=T$, $\alpha=F, sub(\alpha,s)=F$, $\alpha=p_i, sub(\alpha,s)=s(p_i)$.

סגור: עבור $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$, מתקיים $sub((\alpha_1\circ\alpha_2),s)=(sub(\alpha_1,s)\circ sub(\alpha_2,s))$.

כמו כן: $sub(\neg\alpha,s)=(\neg sub(\alpha,s))$.

<u>טענה</u>: לכל פסוק α, אם s_1 ו-s_2 פונקציות הצבה שמזדהות על כל הפסוקים האטומיים שמופיעים ב-α, אזי $sub(\alpha,s_1)=sub(\alpha,s_2)$.

<u>טענה</u>: בהינתן פסוק α, פונקצית הצבה s והשמה z, נגדיר השמה חדשה z': $z'(p_i)=\overline{z}(s(p_i))$. מתקיים: $\overline{z}'(\alpha)=\overline{z}(sub(\alpha,s))$.

<u>טענה</u>: אם α טאוטולוגיה אזי לכל הצבה s מתקיים $sub(\alpha,s)$ היא טאוטולוגיה (וכך גם לסתירה).

הוכחה: תהי z השמה. נראה כי $z\vDash sub(\alpha,s)$. קיימת השמה z' עבורה $\overline{z}'(\alpha)=\overline{z}(sub(\alpha,s))$. α טאוטולוגיה ולכן $\overline{z}'(\alpha)=1$ כלומר גם $\overline{z}(sub(\alpha,s))=1$.

<u>**צורות נורמליות**</u>

<u>הרעיון</u>: נצמצם את אוסף הפסוקים לפסוקים עם צורה מוגבלת ונראה שעדיין ניתן לבטא כל טבלת אמת.

הקבוצה NFF: קבוצה המוגדרת באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $\{T,F\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$. <u>סגור</u>: $\{F_\wedge,F_\vee\}$.

<u>דוגמאות</u>: חוקי: $(\neg p_5\vee p_8)$, $((\neg p_7\vee\neg p_4)\wedge p_5)$. לא חוקי: $(\neg(\neg p_8))$, $(\neg(p_1\vee p_2))$.

משפט ה-NFF: לכל פסוק α קיים פסוק α' מצורת ה-NFF כך ש: 1) $\alpha\equiv\alpha'$. 2) α ו-α' מכילים את אותם האטומים.

בהינתן פסוק α, נתרגם את α לפסוק α'' ב-$\{\neg,\vee,\wedge\}$: נשרטט ל-α'' עץ יצירה. נדחוף את ה-"$\neg$" כלפי מטה בעזרת השקילויות הבאות:

$$\neg T=F,\neg F=T,\neg\neg\delta=\delta,\neg(\alpha_1\wedge\alpha_2)=(\neg\alpha_1\vee\neg\alpha_2),\neg(\alpha_1\vee\alpha_2)=(\neg\alpha_1\wedge\neg\alpha_2).$$

מערכות הוכחה פורמלית

מערכת הוכחה היא מבנה שמוגדר באינדוקציה:

1. **אקסיומות** – טענות שתמיד נכונות – תמיד ניתן להשתמש בהן.
2. **כללי הסק** – כללים בעזרתם מסיקים טענות חדשות מטענות קודמות.
3. **קבוצת המשפטים הפורמליים**: הקבוצה האינדוקטיבית המוגדרת על ידי:

   בסיס: האקסיומות. פעולות: כללי ההסק.

4. **סדרת הוכחה** עבור טענה היא סדרת יצירה במבנה זה. כלומר סדרת הוכחה עבור α היא סידרה סופית $\alpha_1,...,\alpha_n$ כך ש- $\alpha_n=\alpha$ ולכל $1\le i\le n$ מתקיים כי α_1 אקסיומה או α_i התקבל על ידי אחד מכללי ההיסק מטענות קודמות.
5. מסמנים $\vdash\alpha$, ואומרים כי α **יכיח**, את הטענה שקיימת ל- α סדרת הוכחה בתחשיב הפסוקים.

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

אקסיומות:

כל פסוק δ עבורו קיימים פסוקים α,β,γ כך ש- δ הוא אחד מהתבניות הבאות, הוא אקסיומה:

1. $\left(\alpha\to\left(\beta\to\alpha\right)\right)$
2. $\left(\left(\alpha\to\left(\beta\to\gamma\right)\right)\to\left(\left(\alpha\to\beta\right)\to\left(\alpha\to\gamma\right)\right)\right)$
3. $\left(\left(\left(\alpha\to F\right)\to F\right)\to\alpha\right)$

דוגמא: $\left(\left(p_0\to F\right)\to\left(F\to\left(p_0\to F\right)\right)\right)$ - אקסיומה מסוג 1, כאשר $\alpha=\left(p_0\to F\right),\beta=F$.

כלל היסק: MP: $\dfrac{\alpha,\alpha\to\beta}{\beta}$.

הסבר: אם א' גורר את ב', וגם א' מתקיים, הרי שב' מתקיים. MP נקרא גם כלל הניתוק.

הערה: בדיון במערכת ההוכחה בתחשיב הפסוקים נשתמש רק בקשרים $\{\to,F\}$ (כאמור קשרים אלו מהווים מערכת שלמה).

קבוצת המשפטים הפורמליים היא הקבוצה האינדוקטיבית המוגדרת על ידי האקסיומות וכלל MP.

סדרת ההוכחה היא סדרה סופית שבה כל פסוק הוא אקסיומה או מתקבל על ידי הפעלת MP מהפסוקים הקודמים.

טענה: $\vdash\left(\alpha\to\alpha\right)$.

פסוקים מצורת DNF

1. **הגדרת conj** – בסיס: $\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{T,F\}$. סגור: $\{f_\wedge\}$.

   דוגמא: $p_1\wedge T\wedge F$, $p_1\wedge\neg p_2\wedge p_5$.
2. **הגדרת DNF** – בסיס: conj. סגור: $\{F_\vee\}$.

   דוגמא: $\left(p_1\wedge\neg p_2\right)\vee\left(p_3\wedge T\right)$. דוגמא לא נכונה: $\left(p_1\vee p_2\right)\wedge\left(p_3\vee F\right)$.

הערות:

- בהוכחת השלמות של מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים בנינו לכל טבלת אמת פסוק מצורת DNF המממש אותה.
- בהינתן פסוק α, ניתן לבנות ל- α טבלת אמת ואז לממש את טבלת האמת באמצעות פסוק α' מצורת DNF.

משפט ה-DNF: לכל פסוק α קיים פסוק שקול α' מצורת DNF.

<u>פסוקים מצורת CNF</u>

1. **הגדרת Disj** – בסיס: $\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\bigcup\{\neg p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\bigcup\{T,F\}$. סגור: $\{f_\vee\}$.
2. **הגדרת CNF** – בסיס: Disj. סגור: $\{f_\wedge\}$.

משפט ה-CNF: לכל פסוק α קיים פסוק שקול α' מצורת CNF.

<u>הוכחה מתוך הנחות</u>

בהינתן קבוצת הנחות Σ (קבוצת פסוקים Σ), אזי קבוצת המסקנות של Σ, המסומנת בתור $Ded(\Sigma)$ הינה הקבוצה האינדוקטיבית שבסיסה הוא אקסיומות $\Sigma\bigcup$, והסגור שלה הוא $\{MP\}$.

נסמן ב- $\Sigma\vdash\alpha$ את הטענה ש- α שייך לקבוצת המסקנות של Σ, ונאמר ש- α יכיח מתוך Σ.

סדרת הוכחה לפסוק α מתוך קבוצת הנחות Σ היא סדרה סופית $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש- $\alpha_n=\alpha$ ולכל $1\le i\le n$ מתקיים כי α_i הוא או אקסיומה או הנחה או התקבל על ידי MP על פסוקים קודמים בסדרה.

<u>תכונות של מערכת הוכחה</u>

1. הנחת המבוקש ("מה שרוצים להוכיח הוא אחת ההנחות"): אם $\alpha\in X$ אז $X\vdash\alpha$.
2. לכל 2 קבוצות פסוקים Σ_1,Σ_2, אם $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$ אז לכל פסוק α, אם $\Sigma_1\vdash\alpha$ אזי $\Sigma_2\vdash\alpha$.

   זוהי מונוטוניות מערכת ההוכחה: $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2 \Leftarrow Ded(\Sigma_1)\subseteq Ded(\Sigma_2)$.

   מסקנה: אם $\vdash\alpha$ אזי לכל קבוצה Σ מתקיים $\Sigma\vdash\alpha$.
3. טענות עזר: לכל שתי קבוצות פסוקים Σ_1,Σ_2, אם לכל $\alpha\in\Sigma_1$ מתקיים $\Sigma_2\vdash\alpha$ אזי לכל פסוק β אם $\Sigma_1\vdash\beta$ אזי $\Sigma_2\vdash\beta$. אם $\Sigma_1\subseteq Ded(\Sigma_2)$ אז $Ded(\Sigma_1)\subseteq Ded(\Sigma_2)$.

4. אם $\Sigma\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))$ וגם $\Sigma\vdash(\alpha\to\beta)$ אזי $\Sigma\vdash(\alpha\to\gamma)$.
5. לכל פונקצית הצבה s: $s:\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to WFF$ מתקיים כי אם $\Sigma\vdash\alpha$ אז $sub(\Sigma,s)=\{sub(\gamma,s)\mid\gamma\in\Sigma\}\vdash sub(\alpha,s)$.
6. **משפט הדדוקציה:** לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל זוג פסוקים α,β מתקיים כי $\Sigma\cup\{\alpha\}\vdash\beta\Leftrightarrow\Sigma\vdash(\alpha\to\beta)$.

<u>שימושים למשפט הדדוקציה</u>

1. נראה כי לכל פסוק α, מתקיים $\vdash(\alpha\to\alpha)$: על פי משפט הדדוקציה מספיק שנוכיח כי $\{\alpha\}\vdash\alpha$. סדרת ההוכחה: α (1. (הנחה)
2. נראה $\{\alpha\}\vdash((\alpha\to F)\to F)$. ע"פ משפט הדדוקציה מספיק שנוכיח כי $\{\alpha,\alpha\to F\}\vdash F$. סדרת ההוכחה:

1) α (הנחה)
2) $\alpha\to F$ (הנחה)
3) F (MP 1, 2)

3. נראה: $\{\alpha\to\beta\}\vdash\{\beta\to F\}\to\{\alpha\to F\}$. על פי הדדוקציה מספיק שנוכיח כי $\{\alpha\to\beta,\beta\to F,\alpha\}\vdash F$. סדרת ההוכחה:

1) α (הנחה)
2) $\alpha\to\beta$ (הנחה)
3) β (MP 1, 2)
4) $\beta\to F$ (הנחה)
5) F (MP 3, 4)

<u>משפט הדיכוטומיה</u>

לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל α,β מתקיים: אם $\Sigma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ וגם $\Sigma\cup\{\alpha\to F\}\vdash\beta$ אזי $\Sigma\vdash\beta$.

עקביות

<u>הגדרה</u>

קבוצת פסוקים (קבוצת הנחות) X תקרא **עקבית** אם $X \nvdash F$.

<u>משפט</u>

לכל קבוצת פסוקים X, מתקיים כי X עקבית אמ"מ כל תת קבוצה סופית של X היא עקבית.

<u>משפט</u>

קבוצת פסוקים X היא עקבית אמ"מ לא קיים פסוק α כך ש: $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

<u>משפט</u>

קבוצת פסוקים X היא עקבית אמ"מ קיים פסוק α כך ש- $X \nvdash \alpha$.

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$ X עקבית $\Leftarrow$ $X \nvdash F$ $\Leftarrow$ קיים $\alpha = F$ כך ש- $X \nvdash \alpha$.

$\Rightarrow$ נניח ש-X איננה עקבית. נוכיח: לכל α, מתקיים כי $X \vdash \alpha$. X אינה עקבית $\Leftarrow$ $X \vdash F$. יהי α פסוק כלשהו. נראה כי $X \vdash \alpha$:

n.	F	קיימת סדרת הוכחה כי $X \vdash F$
n+1.	$F \to ((\alpha \to F) \to F)$	אקסיומה 1
n+2.	$(\alpha \to F) \to F$	MP(n, n+1)
n+3.	$((\alpha \to F) \to F) \to \alpha$	אקסיומה 3
n+4.	α	MP(n + 2, n + 3)

$\Leftarrow$ לכל α, מתקיים $X \vdash \alpha$.

<u>מתי X לא עקבית</u>

1. X לא עקבית אם קיים פסוק α כך ש: $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
2. X לא עקבית אם לכל β, מתקיים $X \vdash \beta$.

<u>טענה</u>

$X \nvdash F \Leftrightarrow F \notin Ded\left(X\right)$.

<u>משפט הנאותות הצר</u>

לכל פסוק α, אם $\vdash \alpha$ אזי $\vDash \alpha$. (כלומר, כל פסוק יכיח הוא טאוטולוגיה).

- משפט זה נותן לנו קשר בין סינטקס לסמנטיקה.

<u>משפט הנאותות הרחב</u>

לכל קבוצת פסוקים X ולכל פסוק α: אם $X \vdash \alpha$ אזי $X \vDash \alpha$.

<u>עקביות האקסיומות של תחשיב הפסוקים</u>

האם קיימת קבוצה עקבית? שאלה שקולה: האם הקבוצה הריקה היא עקבית (כי הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה). נראה כי ϕ עקבית, כלומר $F \notin Ded\left(\phi\right)$.

נשתמש במשפט הנאותות הצר. F אינו יכיח, כי הוא לא טאוטולוגיה. מכאן ϕ עקבית.

<u>שימושים למשפט הנאותות</u>: משפט הנאותות הוא הכלי שבאמצעותו מוכיחים אי יכיחות ואי עקביות. על מנת להוכיח כי $X \nvdash \alpha$ נראה $X \nvDash \alpha$.

<u>משפט שקול למשפט הנאותות</u>: אם X ספיקה, אז X עקבית.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי X לא עקבית, אזי $X \vdash F$. לפי משפט הנאותות $X \Leftarrow X \vDash F$ לא ספיקה (כל השמה שמספקת את X מספקת את F, אך לא קיימת כזו). סתירה לנתון.

<u>דוגמא</u>

תהי הקבוצה $\Sigma = \left\{ p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$. נוכיח שקבוצה זו הינה עקבית.

צ"ל: $\Sigma \nvdash F$. לפי משפט הנאותות מספיק להראות כי $\Sigma \nvDash F$. כלומר: צריך להראות השמה z המספקת את Σ וגם מקיימת $\overline{z}\left(F\right)=0$. נבחר את ההשמה z_F (השמה הנותנת 0 לכל האטומים). ניתן לראות בקלות שלכל $\alpha \in \Sigma$ מתקיים $\overline{z}\left(\alpha\right)=1$. $\Leftarrow$ z_F מספקת את Σ אבל $\overline{z}_F\left(F\right)=0$.

ומכאן: קיימת השמה המספקת את Σ אך לא את F $\Leftarrow$ $\Sigma \neq F$.

<u>הגדרה</u>

ניסוח 1: נאמר שקבוצת פסוקים X היא **עקבית מקסימלית** אם X עקבית ולכל פסוק α כך ש- $X \nvdash \alpha$ מתקיים כי $X \cup \{\alpha\}$ לא עקבית.

ניסוח 2: X עקבית מקסימלית אם X עקבית ולכל פסוק $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \alpha \to F$.

לא עקבית	עקבית		
	עקבית מקסימלית		
$X \vdash \alpha$ $X \vdash \alpha \to F$	$X \vdash \alpha$ $X \nvdash \alpha \to F$	$X \nvdash \alpha$ $X \vdash \alpha \to F$	$X \nvdash \alpha$ $X \nvdash \alpha \to F$

<u>משפט</u>

תהי X קבוצה עקבית, אזי קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y, כך ש- $X \subseteq Y$.

הרעיון: נרצה לעבור על כל הפסוקים ולדאוג של-X תהיה דעה על כל פסוק.

<u>טענה</u>: תהי X קבוצה עקבית. X עקבית מקסימלית אמ"מ לכל זוג פסוקים β,γ מתקיים $X \vdash \beta \to \gamma \Leftrightarrow X \vdash \neg\beta$ או $X \vdash \gamma$.

<u>טענה</u>: אם X היא קבוצה עקבית מקסימלית, אז X ספיקה.

<u>משפט</u>

לכל קבוצת פסוקים X, X עקבית אמ"מ X ספיקה.

<u>הוכחה</u>: (כיוון אחד בלבד): נניח כי X עקבית. אזי קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y כך ש- $X \subseteq Y$ $\Leftarrow$ Y ספיקה. כלומר קיימת השמה Z_Y המספקת את Y. $Z_Y \vDash Y$. מאחר ומתקיים כי $X \subseteq Y$ הרי ש- $Z_Y \vDash X$. ראינו שכל קבוצה עקבית היא ספיקה.

<u>משפט השלמות לתחשיב הפסוקים</u>

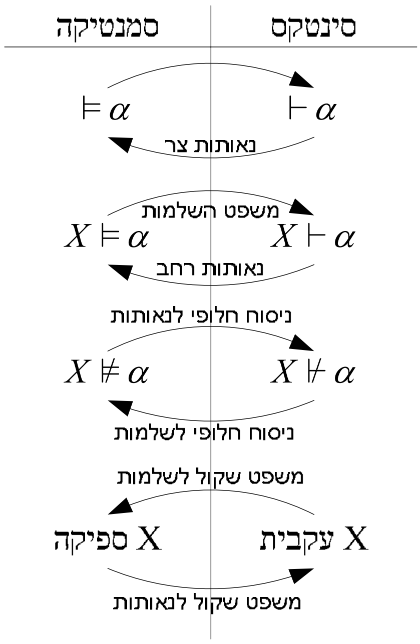
לכל קבוצת פסוקים X ולכל פסוק α, אם $X \vDash \alpha$ אזי $X \vdash \alpha$.

<u>מסקנה ממשפט השלמות והנאותות – משפט הקומפקטיות</u>

תהא X קבוצה. X ספיקה אמ"מ כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

שימוש: במשפט זה נשתמש פעמים רבות כדי להפוך בעיות אינסופיות לבעיות סופיות.

<u>קשר בין סינטקס לסמנטיקה:</u>



<u>הגדרה</u>

השמה המספקת קבוצה Σ תיקרא **מודל** של Σ.

נסמן: $M\left(\Sigma\right) = M_\Sigma = \left\{\text{all models of }\Sigma\right\} = \left\{z \mid Z \vDash \Sigma\right\}$.

<u>משפט</u>

אם לקבוצה Σ יש מודל, אז היא עקבית.

<u>משפט</u>

קבוצת פסוקים X היא עקבית מקסימלית אמ"מ קיימת בדיוק השמה אחת המספקת את X.

ניסוח שקול: X עקבית מקסימלית אמ"מ $\left|M\left(X\right)\right| = 1$.

<u>דוגמאות</u>

קבוצות מקסימליות ולא מקסימליות:

הקבוצה:	עקבי מקסימלי?
$\Sigma = \left\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\right\}$	מקסימלי. $M\left(\Sigma\right) = \left\{z_T\right\}$
$\Sigma = \left\{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\right\}$	מקסימלי. $M\left(\Sigma\right) = \left\{z_F\right\}$
$\left\{p_{2i} \to p_{2i+1} \mid i \in \mathbb{N}\right\}$	לא מקסימלי. כל "השמת מדרגה" תספק את הקבוצה.
$\left\{p_i \vee p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\right\}$	לא מקסימלי
$\left\{\neg\left(p_i \vee p_{i+1}\right) \mid i \in \mathbb{N}\right\}$	מקסימלי
$\left\{\neg p_i \vee \neg p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\right\}$	לא מקסימלי

צביעה של גרפים

בהינתן גרף G עם (V,E) **צביעה חוקית** בשני צבעים היא צביעה בה כל צומת נצבע באחד הצבעים, ולשני צמתים שכנים צמתים שונים. גרף הוא **2-צביע** אם קיימת לו צביעה חוקית בשני צבעים.

בהינתן גרף $G(V,E)$ נתרגם את השאלה לשאלה בפסוקים:

- לכל צומת נתאים אטום.
- לכל קשת $e=v_iv_j$ נתאים פסוק: $\alpha_{ij}=p_i\oplus p_j$ כאשר $\alpha_{ij}\equiv(p_i\wedge\neg p_j)\vee(\neg p_i\wedge p_j)$.
- נגדיר: $X_G=\{\alpha_{ij}\mid(i,j)\in E\}$.

טענה 1: G הוא גרף 2-צביע אמ"מ X_G ספיקה.

טענה 2: גרף G הוא 2-צביע אמ"מ כל תת גרף סופי שלו הוא 2-צביע.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון: הגרף הוא 2-צביע $\Leftarrow$ הצביעה הינה צביעה חוקית עבור כל תת גרף.

$\Rightarrow$ נתון: כל תת גרף סופי הוא 2-צביע. נוכיח כי G הוא 2-צביע. מספיק שנוכיח כי X_G ספיקה. על פי הקומפקטיות מספיק שנראה שכל תת קבוצה סופית של X_G ספיקה. תהי $D\subseteq X_G$ סופית.

נסמן ב-V_D את קבוצת הצמתים המופיעים ב-D. נסמן ב-G_D את תת הגרף המתאים ל-V_D. G_D הוא תת גרף סופי (מכיוון ש-D סופית). G_D הוא 2-צביע ולכן $X_{G,D}$ ספיקה. $D\subseteq X_{G,D}$ כי D מתארת חלק מהקשתות בין הצמתים ב-V_D ולכן גם D ספיקה.

תבנית (הוכחות כגון צביעת גרף)

1. תרגום הבעיה לפסוקים. נחפש X_G כך ש-X_G ספיקה אמ"מ G מקיימת את התכונה.
2. משתמשים בזהירות במשפט הקומפקטיות.

גדירות

בהינתן קבוצת פסוקים Σ, Σ **מגדירה** את קבוצת ההשמות המספקות אותה. עבור קבוצת פסוקים Σ, קבוצת המודלים של Σ מסומנת ב- $Ass\left(\Sigma\right)$ ומוגדרת $Ass\left(\Sigma\right)=\left\{z \mid z\vDash\Sigma\right\}$.

<u>טענה</u>: אם $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$ אז $Ass\left(\Sigma_2\right)\subseteq Ass\left(\Sigma_1\right)$.

<u>שאלה</u>: בהינתן קבוצת השמות K, האם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה את K, כלומר $Ass\left(\Sigma\right)=K$? אם קיימת קבוצת פסוקים כזו נאמר כי K **גדירה.** אם קיימת קבוצת פסוקים סופית שמגדירה את K נאמר ש- K **גדירה באופן סופי**.

כמה פסוקים יש? $\aleph_0$. כמה קבוצת פסוקים? $2^{\aleph_0}$. כמה קבוצות השמות? $2^{2^{\aleph_0}}$.

מאחר וכל קבוצת פסוקים מגדירה קבוצת השמות יחידה, אזי משיקולי ספירה קיימות קבוצות לא גדירות.

<u>דוגמאות</u>

$K_1=\phi$. האם הקבוצה גדירה? כן, למשל $\Sigma=\left\{p_1,\neg p_1\right\}$.

K_2 הינה קבוצת כל ההשמות. כל קבוצת טאוטולוגיות מגדירה את K_2.

<u>הוכחת אי גדירות</u>

סכימת הוכחת אי גדירות של קבוצת השמות K:

1. נניח בשלילה כי K גדירה על ידי קבוצת פסוקים X.
2. נבחר קבוצת פסוקים מפורשת Y שעבורה ידוע מהו $M\left(Y\right)$.
3. מראים כי $X\cup Y$ לא ספיקה, על ידי $M\left(Y\right)\cap M\left(X\right)\equiv M\left(Y\right)\cap K=\phi$.
4. מראים כי $X\cup Y$ ספיקה באמצעות משפט הקומפקטיות:

   מראים שכל תת קבוצה סופית $D\subseteq X\cup Y$ היא ספיקה. מראים השמה z_D השייכת ל- K כך ש: $z_D\vDash D$. (מסתמכים בבניית z_D על האינדקס המקסימלי המופיע גם ב- D וגם ב- Y.)
5. מ-3 ומ-4 אנו מקבלים סתירה: X לא קיימת, ולכן K לא גדירה.

<u>הגדרה</u>

נאמר שקבוצת השמות K **תלויה בקבוצת משתנים** $D \subseteq \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ אם קיימות השמות z_1, z_2 שמזדהות על כל האטומים מחוץ ל- D ומתקיים $z_1 \in K$ ו- $z_2 \notin K$.

<u>הגדרה</u>

נאמר שקבוצת אטומים $S \subseteq \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ מהווה **תומך** לקבוצת השמות K אם לכל שתי השמות z_1, z_2 שמזדהות על כל האטומים בתוך S (כלומר לכל $p_i \in S$, $z_1(p_i) = z_2(p_i)$) אז $z_1 \in K \Leftrightarrow z_2 \in K$.

דוגמא: $K = \{z \mid z(p_i) = 1\}$, $S_1 = \{p_1\}, S_2 = \{p_1, p_3, p_4\}$.

<u>הגדרה</u>

נאמר שלקבוצת השמות יש **תומך סופי** אם קיים תומך לקבוצה בגודל סופי.

<u>טענה</u>

לקבוצה K יש תומך סופי אמ"מ K גדירה באופן סופי.

- מהתומך הסופי ניתן ליצור מספר פסוקים סופי, שיתאר את התומך. פסוקים אלו יגדירו את Σ.
- אם K גדירה באופן סופי אז קיימת Σ סופית המגדירה אותה. מפסוקי Σ יש מספר סופי של אטומים. אטומם אלו מהווים תומך ל- K.

תחשיב היחסים

הקדמה

<u>**הרעיון המרכזי**</u>

1. עצמים.
2. תכונות המיוחסות לעצמים

דוגמא: דני ילד טוב, יוסי גבוה.

חיבור: אם דני ילד טוב אז יוסי גבוה. כימות: כל הילדים גבוהים.

<u>**סימונים**</u>

$\forall x$ - לכל x. $\exists x$ - קיים x. דוגמאות:

- "לכל x ולכל y מתקיים $xy = yx$" ייכתב בצורה הבאה: $\forall x \forall y \left(xy = yx \right)$.
- "לכל מספר קיים מספר הגדול ממנו" ייכתב: $\forall x \exists y \left(y > x \right)$.

כל טענה מתמטית ניתנת לתיאור בעזרת תחשיב היחסים.

הגדרה פורמלית של השפה

<u>**הסימנים של תחשיב היחסים**</u>

הסימנים מתחלקים ל-2 קבוצות:

1. סימנים לוגיים – סימנים המשותפים לכל השפות של תחשיב היחסים.
2. פרמטרים של השפה – מילון – סימנים המיוחדים לשפה.

<u>הסימנים הלוגיים</u>

- כמתים: לכל $\forall$, קיים $\exists$.
- קשרים של תחשיב הפסוקים: $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$.
- סוגריים ופסיק.
- סימן שוויון $\approx$.
- משתנים: $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

<u>מילון: פרמטרים של השפה</u>

- סימני קבועים אישיים מסומנים ב- C_α כאשר α אינדקס מספרי.
- סימני יחס המסומנים ב- $R_{n,\alpha}$ כאשר $n,\alpha \in \mathbb{N}$. n הוא מספר הארגומנטים ביחס ו- α הוא אינדקס מספרי.
- סימני פונקציה המסומנים ב- $F_{n,\alpha}$. n הוא מספר הארגומנטים ביחס ו- α הוא אינדקס מספרי.

מילון: אוסף סימני יחס, סימני פונקציה וסימני קבועים אישיים, כאשר לכל סימן פונקציה ולכל סימן יחס ידוע מספר הארגומנטים. מילון מסומן לרוב באות τ. לדוגמא: $\tau_0 = \left\langle R_{1,0}, R_{1,1}, F_{2,0}, F_{2,3}, C_2, C_3 \right\rangle$.

מילון סופי הוא מילון המכיל מספר סופי של סימנים. **מילון יחסי** הוא מילון המכיל רק סימני יחס.

<u>הגדרת אוסף הטענות בשפה</u>

שלב 1: הגדרת אוסף העצמים עליהם מדברים. **שמות עצם** אינם טענות שניתן לשאול עליהם נכון / לא נכון.

שלב 2: נגדיר את אוסף הטענות בשפה שתיקראנה **נוסחאות** על סמך שמות העצם.

הגדרת אוסף שמות העצם

ההגדרה הינה באינדוקציה: (סימני פיסוק, משתנים $\cup$ קבועים)X.

קבוצת האטומים: סימני הקבועים מהמילון בתוספת המשתנים $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

קבוצת הפעולות: לכל סימן פונקציה $F_{n,\alpha}$ במילון נגדיר פעולה המקבלת שמות עצם $t_1,...,t_n$ ומוציאה כפלט את $F_{n,\alpha}\left(t_1,...,t_n\right)$.

<u>הערה</u>: מספר הפעולות הינו כמספר הפונקציות במילון של השפה. ישנן שפות ללא פונקציות, ולכן ללא פעולות ליצירת שמות עצם. מספר שמות העצם בשפות אלו זה למספר האטומים.

הגדרת אוסף הטענות/נוסחאות.

ההגדרה הינה באינדוקציה. קבוצת האטומים הינה אוסף סדרות הסימנים מהצורה $R_{n,\alpha}\left(t_1,...,t_n\right)$ כאשר $t_1,...,t_n$ שמות עצם, ו- $R_{n,\alpha}$ הינו סימן יחס n-מקומי מהמילון. כל סדרת סימנים כזו תקרא **נוסחה אטומית**.

אבחנה: בשם עצם יכולות להיות כלולות כמה פונקציות. בנוסחה אטומית יש רק סימן יחס אחד (ואחד או יותר שמות עצם).

עבור הגדרת אוסף הנוסחאות נתייחס לסימן "=" כאל סימן יחס דו מקומי. דוגמא: $F\left(x,x\right) = F\left(x,y\right)$ זוהי נוסחה אטומית.

קבוצת אוסף הפעולות מתחלקת לשני חלקים:

1. הפעלת הקשרים של תחשיב הפסוקים. אם α,β נוסחאות, אזי גם הביטויים הנ"ל הם נוסחאות: $(\alpha\wedge\beta),(\alpha\vee\beta),(\alpha\to\beta),(\neg\alpha)$.
2. הפעלת **כמתים**: לכל נוסחה α ומשתנה x, גם $\forall x\alpha$ ו- $\exists x\alpha$ הן נוסחאות.

הערה: מניחים קדימות לכמתים: $\forall v_i P(v_i)\to R(v_r)\equiv(\forall v_i P(v_i))\to R(v_r)$

<u>הבדלים בין סימני יחס לפונקציות</u>

$F(F(\ ))$ הינו שם עצם. $R(R(\ ))$ לא מוגדר כחלק מתחשיב היחסים!

$R(F(\ ))$ הינה נוסחה אטומית. $F(R(\ ))$ לא קיים – אסור להפעיל סימני פונקציה על יחס.

$R\to R$ מותר. $F\to F$ - אסור. יש לתת סימני יחס בין הקשרים והכמתים.

$\forall xR$ מותר. $\forall xF$ אסור.

<u>סמנטיקה לתחשיב היחסים - הגדרה אינטואיטיבית</u>

בהינתן מילון τ, $\tau=\langle R_1,...,R_m,F_1,...,F_k,C_1...,C_l\rangle$ **מבנה** עבור τ מוגדר כך:

$$M=\langle D^M,R_1{}^M,...,R_m{}^M,F^M{}_1,...,F_k{}^M,C_1^M...,C_l^M\rangle$$

כאשר D^M הוא התחום, R_i^M הוא הפירוש של סימן היחס R_i במבנה M, F_i^M הוא הפירוש של סימן הפונקציה F_i במבנה M, C_i^M הוא הפירוש של סימן הקבוע C_i במבנה M.

דוגמא: $\tau=\langle R_{2,0},F_{1,0},C_0,C_1\rangle$. $M_1=\langle\mathbb{N},\leq,+1,2,3\rangle, M_2=\langle P(A),\subseteq,\text{completion},\phi,A\rangle$.

בהינתן מבנה עבור מילון τ, נגדיר **השמה** z המתאימה למשתנים ערכים מהתחום:

$$z:\{v_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$$

נגדיר **הרחבה של ההשמה** z, שתתאים לכל שם עצם t מעל המילון τ איבר בתחום שיסומן $\overline{z}(t)$.

נגדיר באינדוקציה על מבנה שמות העצם:

בסיס: t משתנה $\Leftarrow \overline{z}(t)=z(t)$. t קבוע $\Leftarrow t=c_i \Leftarrow \overline{z}(c_i)=c_i^M$.

סגור: $\overline{z}(F_{n,\alpha}(t_1,...,t_n))=F_{n,\alpha}^M(\overline{z}(t_1),...,\overline{z}(t_n))$.

<u>משתנים חופשיים וקשורים</u>

1. $\forall v_1 R_{2,0}\left(v_1,v_1\right)$ - כל האיברים בתחום הם ביחס עם עצמם.
2. $R_{2,0}\left(v_1,v_1\right)$ - v_1 ביחס $R_{2,0}$ עם עצמו.

בדוגמא הראשונה אין צורך לדעת מה הערך של v_1 בהשמה, ובנוסחה השניה כן. בנוסחה הראשונה v_1 מופיע קשור (תחת השפעת הכמת), לכן הוא אינו מופיע בתרגום הנוסחה למילים ואין צורך לדעת את הערך שההשמה נתנה לו. בנוסחה השניה v_1 חופשי.

<u>טענה</u>: תהי α נוסחה מעל מילון τ ו- M מבנה עבור τ. אם z_1 ו- z_2 השמות ב- M המזדהות על המשתנים החופשיים ב- α, אז ערך האמת של α תחת z_1 ותחת z_2 זהה.

<u>מסקנה</u>: אם α נוסחה ללא משתנים חופשיים, אז ערך האמת של α אינו תלוי בהשמה.

<u>הגדרה</u>: נוסחה α בלי משתנים חופשיים נקראת **פסוק**.

<u>הגדרה פורמלית</u>: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחה α מתי v_i הוא **משתנה חופשי** ב- α.

בסיס: נוסחאות אטומיות: v_i חופשי ב- α אם v_i מופיע ב- α.

סגור: קשרים: עבור $\circ\in\left\{\wedge,\vee,\rightarrow\right\}$, v_i חופשי ב- $\left(\alpha\circ\beta\right)$ אם v_i חופשי ב- α או v_i חופשי ב- β.

v_i חופשי ב- $\left(\neg\alpha\right)$ אם v_i חופשי ב- α.

כמתים: v_i חופשי ב- $\forall v_j\alpha$ או ב- $\exists v_j\alpha$ אם v_i חופשי ב- α וגם $i\neq j$.

משתנה שאינו חופשי נקרא **משתנה קשור**.

<u>סמנטיקה לתחשיב היחסים - הגדרה פורמלית</u>

הגדרת מבנה: בהינתן מילון τ: $\tau=\left\langle R_1,...,R_m,F_1,...,F_k,C_1,...,C_l\right\rangle$ מבנה עבור τ הוא:

$$M=\left\langle D^M,R_1^{\ M},...,R_m^{\ M},F^M{}_1,...,F_k^{\ M},C_1^{\ M}...,C_l^{\ M}\right\rangle$$

כאשר D^M הוא התחום.

- לכל $1\le i\le m$ אם R_i הוא סימן יחס n-מקומי אזי $R_i^M\subseteq\underbrace{D^M\times...\times D^M}_{n\text{ times}}$, כלומר R_i^M הוא יחס n-מקומי מעל D^M.
- לכל $1\le i\le k$ אם F_i סימן פונקציה n-מקומי אז $F_i^M:\underbrace{D^M\times...\times D^M}_{n\text{ times}}\rightarrow D^M$, כלומר F_i^M מתארת מה ההערך של F_i עבור כל n-יה סדורה של איברים מ- D^M.
- לכל $1\le i\le l$, מתקיים: $C_i^M\in D^M$.

ראינו כיצד בהינתן מבנה M מגדירים השמה z ב- M: $z:\{v_i \mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$ וראינו כיצד להרחיב את z כך שתתאים ערך מהתחום לכל שם עצם.

בהינתן נוסחה α מעל מילון τ, מבנה M והשמה z עבור M נסמן $M\underset{z}{\models}\alpha$ את הטענה ש- α **מסתפקת** ב- M תחת z.

הגדרת ערך האמת: נגדיר באינדוקציה על מבנה α מתי $M\underset{z}{\models}\alpha$.

בסיס: α נוסחה אטומית: $\alpha=(t_1\approx t_2)$ עבור t_1,t_2 שמות עצם, $M\underset{z}{\models}\alpha\Leftrightarrow \overline{z}(t_1)=\overline{z}(t_2)$.

כמו כן כאשר $\alpha=R(t_1,...,t_n)$, עבור $t_1,...,t_n$ שמות עצם, $M\underset{z}{\models}\alpha\Leftrightarrow(\overline{z}(t_1),...,\overline{z}(t_n))\in R^M$.

סגור:

1. קשרים: מחשבים את ערך האמת בעזר טבלאות האמת. לכל נוסחה α, מבנה M והשמה z, מתקיים כי $M\underset{z}{\models}\alpha$ או $M\underset{z}{\models}\neg\alpha$ אבל לא שניהם.
2. כמתים: נניח שלכל מבנה M' והשמה z' אנו יודעים האם $M'\underset{z'}{\models}\alpha$. נרצה לדעת האם $M\underset{z}{\models}\forall v_i\alpha$, $M\underset{z}{\models}\exists v_i\alpha$ למבנה והשמה מסויימים. בהינתן השמה z, משתנה v_i ואיבר $d\in D^M$, נגדיר השמה מתוקנת $z[v_i\leftarrow d]$:

$$z[v_i\leftarrow d](v_j)=\begin{cases} z(v_j) & i\neq j\\ d & i=j\end{cases}$$

נגדיר: לכל $d\in D^M$ מתקיים $M\underset{z[v_i\leftarrow d]}{\models}\alpha \Leftrightarrow M\underset{z}{\models}\forall v_i\alpha$.

קיים $d\in D^M$ עבורו $M\underset{z[v_i\leftarrow d]}{\models}\alpha \Leftrightarrow M\underset{z}{\models}\exists v_i\alpha$.

<u>דוגמא:</u> $\tau=\langle R_{2,0},F_{2,0},F_{1,0}\rangle$

$M=\langle\mathbb{N},<,+,+2\rangle$

z	v_1	v_2	v_3	v_4
	2	5	6	80

האם $M\underset{z}{\models}\alpha$? $\alpha=\exists v_1 R_{2,0}(F_{1,0}(v_1),F_{2,0}(v_1,v_2))$.

קיים $d\in D^M$ כך ש- $M\underset{\underset{\equiv z'}{z[v_1\leftarrow d]}}{\models}R_{2,0}(F_{1,0}(v_1),F_{2,0}(v_1,v_2)) \Leftrightarrow M\underset{z}{\models}\alpha$

$\Leftrightarrow$ קיים $d\in D^M$ כך ש- $(\overline{z}'(F_{1,0}(v_1)),\overline{z}'(F_{2,0}(v_1,v_2)))\in R_{2,0}^M$

$\Leftrightarrow$ קיים $d\in D^M$ כך ש- $(F_{1,0}^M(\overline{z}'(v_1)),F_{2,0}^M(\overline{z}'(v_1),\overline{z}'(v_2)))\in R_{2,0}^M$

$\Leftrightarrow$ קיים $d\in D^M$ כך ש- $(F_{1,0}^M(d),F_{2,0}^M(d,5))\in R_{2,0}^M$.

$\Leftrightarrow$ קיים $d \in D^M$ כך ש- $(d+2, d+5) \in <$

ולכן התשובה היא כן.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה: נוסחה α מעל מילון τ נקראת **אמת לוגית** אם לכל מבנה M עבור τ ולכל השמה z ב- M, מתקיים $M \underset{z}{\vDash} \alpha$.

על מנת להראות שנוסחה אינה אמת לוגית יש להראות מבנה והשמה שאינם מספקים אותה.

טענות

1. $\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2)$ אמת לוגית.
2. $\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ לא אמת לוגית.

הגדרות

- נאמר שנוסחה α היא **סתירה** אם לכל מבנה M עבור המילון של α ולכל השמה z ב- M מתקיים כי $M \underset{z}{\nvDash} \alpha$.
- נוסחה α היא **ספיקה** אם קיים מבנה M וקיימת השמה z כך ש- $M \underset{z}{\vDash} \alpha$.
- נאמר ש- $\boldsymbol{M \vDash \alpha}$ אם לכל השמה z ב- M, מתקיים $M \underset{z}{\vDash} \alpha$.
- נאמר ש- $\boldsymbol{M \nvDash \alpha}$ אם קיימת השמה z ב- M, עבורה $M \underset{z}{\nvDash} \alpha$.
- נסמן $\vDash \alpha$ אם α הוא אמת לוגית.
- נאמר ש- $\boldsymbol{M \underset{z}{\vDash} \Sigma}$ עבור קבוצת נוסחאות Σ, אם לכל $\alpha \in \Sigma$, $M \underset{z}{\vDash} \alpha$.
- נאמר שנוסחה α **גוררת לוגית** נוסחה β ונסמן $\boldsymbol{\alpha \vDash \beta}$ אם לכל מבנה M והשמה z, אם $M \underset{z}{\vDash} \alpha$ אז גם $M \underset{z}{\vDash} \beta$.
- נאמר ש- $\boldsymbol{\Sigma \vDash \alpha}$ אם לכל מבנה M והשמה z, אם $M \underset{z}{\vDash} \Sigma$ אז $M \underset{z}{\vDash} \alpha$.

דוגמא

נראה כי $\exists v_1 \alpha \equiv \neg \forall v_1 \neg \alpha$.

יהי M מבנה ו- z השמה: $M \underset{z}{\vDash} \exists v_1 \alpha \Leftrightarrow$ קיים $d \in D^M$ כך ש- $M \underset{z[v_1 \leftarrow d]}{\vDash} \alpha \underset{TT_\neg}{\Leftrightarrow}$ קיים $d \in D^M$ כך ש- $M \underset{z[v_1 \leftarrow d]}{\nvDash} \neg \alpha \Leftrightarrow$ לא לכל $d \in D^M$ מתקיים $\mathrm{M} \underset{z(v_1 \leftarrow d)}{\vDash} \neg d \Leftrightarrow M \underset{z}{\nvDash} \forall v_1 \neg \alpha \underset{TT_\neg}{\Leftrightarrow} M \underset{z}{\vDash} \neg \forall v_1 \neg \alpha$.

<u>הצבות</u>

בהינתן פונקצית הצבה: שמות העצם$\to$משתנים: s, נגדיר את $sub(\varphi,s)$ עבור נוסחה φ.

נגדיר עבור שם עצם t את $sub(t,s)$:

בסיס: t משתנה$\Leftarrow sub(v_i,s)=s(v_i)$. t קבוע$\Leftarrow sub(c,s)=c$.

סגור: סימן פונקציה $F \Leftarrow sub(F(t_1,...,t_n),s)=F(sub(t_1,s),...,sub(t_n,s))$.

נגדיר עבור נוסחה φ את $sub(\varphi,s)$:

בסיס: נוסחה אטומית: $sub(R(t_1,...,t_n),s)=R(sub(t_1,s),...,sub(t_n,s))$.

סגור: קשרים: נציג לכל צד בנפרד: דוגמא: $sub(\alpha\to\beta,s)=sub(\alpha,s)\to sub(\beta,s)$.

כמתים:

- $sub(\forall v_i\alpha,s)=\forall v_i sub(\alpha,s')$, כאשר s' מוגדרת כך: לכל $i\neq j$ $s'(v_j)=s(v_j)$. $s'(v_i)=v_i$, כלומר, את המשתה הקשור לא משנים.
- עבור s' כנ"ל, $sub(\exists v_i\alpha,s)=\exists v_i sub(\alpha,s')$.

Renaming של משתנים קשורים

מוטיבציה: נניח נתון $\forall v_1R(v_1,v_1)$, אם היינו משנים ל- $\forall v_8R(v_8,v_8)$ לא היה משתנה כלום. לעומת זאת, אם נתון $\forall v_1R(v_1,v_2)$, אזי שינוי ל- $\forall v_2R(v_2,v_2)$ משנה את המשמעות.

תהי s פונקצית הצבה מהמשתנים למשתנים עבורה לכל $i\neq j$ מתקיים $s(v_j)=v_j$ (s משנה את v_i בלבד). אם $s(v_i)$ לא מופיע ב- φ אז: $\forall v_i\varphi\equiv\forall s(v_i)sub(\varphi,s)$ ו- $\exists v_i\varphi\equiv\exists s(v_i)sub(\varphi,s)$.

Pronex Normal Form

שלב 1: הגדרת נוסחאות חסרות כמתים מעל מילון τ - מסומן $\boldsymbol{QF(\tau)}$.

בסיס: נוסחאות אטומיות. סגור: קשרים.

שלב 2: הגדרת $\boldsymbol{PNF(\tau)}$: בסיס: $QF(\tau)$. סגור: כמתים.

משפט ה-PNF

לכל נוסחה α קיימת נוסחה α' מצורת PNF כך ש- $\alpha \equiv \alpha'$.

ההוכחה באינדוקציית מבנה על מבנה הנוסחה.

בסיס: α נוסחה אטומית $\Leftarrow$ α מצורת PNF.

סגור: נניח של- α, β קיימים שקולים α', β' מצורת PNF.

כמתים: $\forall v_i \alpha$, נמצא נוסחה: $\forall v_i \alpha'$ וכך גם ל- $\exists$.

קשרים: נניח $(\alpha \to \beta)$, ואז:

1. $(\alpha' \to \beta')$
2. מתרגמים ל- $\{\neg, \wedge, \vee\}$: $(\neg \alpha' \vee \beta')$
3. עושים renaming למשתנים הקשורים ב- α' כך שלא יופיע ב- β' ולהיפך.
4. משתמשים בשקילויות הבאות:
   - $\neg \forall v_i \varphi \equiv \exists v_i \neg \varphi$
   - $\neg \exists v_i \varphi \equiv \forall v_i \neg \varphi$
   - $\forall v_i (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall v_i \varphi \wedge \forall v_i \psi$
   - $\exists v_i (\varphi \vee \psi) \equiv \exists v_i \varphi \vee \exists v_i \psi$
   - אם v_i לא חופשי ב- ψ אז: $(\forall v_i \varphi \vee \psi) \equiv \forall v_i (\varphi \vee \psi)$
   - אם v_i לא חופשי ב- ψ אז: $(\forall v_i \varphi \wedge \psi) \equiv \forall v_i (\varphi \wedge \psi)$
   - אם v_i לא חופשי ב- ψ אז: $(\exists v_i \varphi \vee \psi) \equiv \exists v_i (\varphi \vee \psi)$

גדירות של יחסים במבנה

הגדרות

בהינתן נוסחה $\varphi(v_{i1},...,v_{in})$ הם המשתנים החופשיים של φ), τ מילון ו-M מבנה, נגדיר:

- קבוצת ה n-יות של איברים ב- D^M שאם ההשמה תתן אותם ל- $v_{i1},...,v_{in}$ אז φ תסתפק תכונה $\varphi(M)$.
- $M \underset{z}{\models} \varphi \Leftrightarrow (z(v_{i1}),...,z(v_{in})) \in \varphi(M)$.
- $\varphi(M) = \{\ (a_1,...,a_n) \mid \varphi$ מספקת את $z(v_{i1}) = a_1,...,z(v_{in}) = a_n$ עבורה z כל השמה $\}$.

בהינתן נוסחה φ נאמר ש- φ **מגדירה** את $\varphi(M)$.

<u>דוגמא</u>

נתון מילון $\tau=\left\langle F_{2,0},F_{1,0}\right\rangle$ ומבנה $M=\langle\mathbb{N},+,\cdot\rangle$.

נבנה יחס $\alpha_{div}(v_1,v_2)=\exists v_3\left(F_{2,1}(v_1,v_3)=v_2\right)$.

נבנה קבוע אפס: $\alpha_0(v_1)=\forall v_2\left(F_{2,0}(v_1,v_2)=v_2\right)$.

נבנה קבוע אחד: $\alpha_0(v_1)=\forall v_2\left(F_{2,0}(v_1,v_2)=v_2\right)$.

נגדיר יחס של ראשונים: $\alpha_{\text{prime}}(v_1)=\forall v_2\left(\alpha_{div}(v_2,v_1)\rightarrow\left((v_2=v_1)\vee\alpha_1(v_2)\right)\right)$.

מתקיים: $\alpha_{div}(M)=\{(n,m)\mid n/m\}$. כמו כן: $M\underset{z}{\vDash}\alpha_{\text{prime}}(v_1)\Leftarrow z(v_1)\in\{n$ | n ראשוני $\}$.

הראנו כי ב- M מתקיים כי $\{0\},\{1\}$ ו-$\{n$ | n ראשוני$\}$ הם גדירים.

<u>גדירות של מבנים</u>

בהינתן פסוק φ נגדיר $\boldsymbol{Mod}(\varphi)$ להיות אוסף המבנים המספקים את φ:

$Mod(\varphi)=\{M\mid M\vDash\varphi\}$.

בהינתן קבוצת פסוקים Σ נגדיר $\boldsymbol{Mod}(\Sigma)$ להיות אוסף המבנים המספקים את Σ:

$Mod(\Sigma)=\{M\mid M\vDash\Sigma\}$

קבוצת פסוקים Σ **מגדירה** את $Mod(\Sigma)$ ($M(\Sigma)$).

השאלה שנשאל היא: בהינתן קבוצת מבנים K, האם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש- $K=Mod(\Sigma)$?

אם קיימת, נאמר כי K **גדירה**. לדוגמא: $\tau=\left\langle R_{2,0}\right\rangle$, $K=\{M$ | R^M יחס סימטרי$\}$.

הפסוק $\forall v_0\forall v_1\left(R_{2,0}(v_0,v_1)\rightarrow R_{2,0}(v_1,v_0)\right)$ מגדיר את K.

EOF