עדכון אחרון: 24.7.2010

פיסיקה 2ממ

ניר אדר

פיסיקה 2ממ - חשמל, מגנטיות וגלים

החוברת נכתבה בהתאם לתוכנית הלימוד של הקורס "פיסיקה 2מ" בטכניון.
זו איננה חוברת רשמית של הטכניון אלא חוברת פרטית שנכתבה על ידי **ניר אדר**.
המחבר איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע בחוברת, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים בה. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.
כמו כן, המחבר איננו אחראי על שינויים שיכולו בתוכן הקורס.

<u>תודות</u>

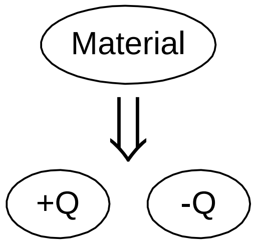
איל רוטמן, אביחי בר, עומר סלע, וכל האחרים שתרמו, העירו או הוסיפו לחוברת זו.
אליסה בלייק על איור הפתיחה ועל האיור בעמוד 42.

ניר אדר
ינואר 2003

תוכן עניינים

הרצאה 1 – חוק קולון, השדה החשמלי וחוק גאוס

הקדמה



קיים מטען משני סוגים, שנקרא להם מטען חיובי ומטען שלילי. היקום הוא נטראלי – סה"כ המטען החיובי זהה לסך המטען השלילי.
תהליך הטעינה הוא תהליך הפרדת מטען למטען חיובי ומטען שלילי.

אם המטענים רחוקים מספיק, ניתן להתעלם מה Q- ולקבל חומר טעון ב Q+.

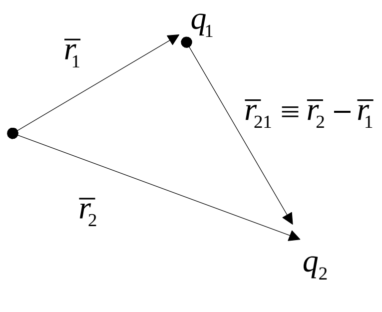
אלקטרוסטטיקה

מטפלת בהתנהגותו של הכוח החשמלי, כאשר המטענים נמצאים במצב סטטי. (לא נעים כלל)

עקרונות

1. קיים מטען חיובי משני סוגים, שיקרא מטען חיובי ומטען שלילי.
2. שימור המטען – במערכת סגורה סך כל המטען יישאר קבוע.
3. מטען הוא בדיד. מטען הוא כפולות של יחידה בסיסית (e).
4. חוק הכוח (Coulomb 1785):
   א. הכוח פועל בכיוון הקו המחבר בין המטענים.
   ב. הכוח מושפע מהמרחק בריבוע: $\frac{1}{r^2}$.
   ג. הכוח פרופורציוני למכפלת המטענים. $\left|\bar{F}\right| \propto q_1 q_2$.
5. כאשר דנים באלקטרוסטטיקה, החוק השלישי של ניוטון מתקיים.
6. עיקרון הסופרפוזיציה: $\bar{F}_j^{(tot)} = \sum_i F_j^{(i)}$
7. מטען הוא אינווריאנטי (גם בתורת היחסות הפרטית).

חוק קולון



נגדיר ווקטור יחידה על הקו המחבר בין הווקטורים:

$$\boxed{\hat{r}_{21} = \frac{\bar{r}_{21}}{\left|\bar{r}_{21}\right|}}$$

חוק קולון: הכוח הפועל על q_2 על ידי q_1:

$$\boxed{\bar{F}_2 = k \cdot \frac{q_1 q_2}{\left|\bar{r}_{21}\right|^2} \hat{r}_{21} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{\left|\bar{r}_{21}\right|^3} \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}$$

אם סימן q_1 זהה לסימן q_2 , בין החלקיקים כוח דוחה. אם החלקיקים הפוכי סימן, הכוח הוא כוח מושך.

על פי החוק השלישי של ניוטון, מתקיים: $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 = k \cdot \frac{q_1 q_2}{\left|\bar{r}_{12}\right|^2} \cdot (\hat{r}_{12})$

כוח קולון הוא כוח מרכזי, ולכן הוא כוח משמר.

<u>יחידות</u>

נעבוד בקורס עם שתי מערכות של יחידות: c.g.s-esu ו-m.k.s-A (שנקראת גם SI).

1. c.g.s-esu (electricostatic unit = esu)

$$\begin{cases} [F]=dyne \\ [r]=cm \\ k=1 \\ [q]=esu/statcoulomb \\ 1dyne=\dfrac{1esu\cdot 1esu}{(1cm)^2} \end{cases} \Rightarrow F=\frac{q_1q_2}{r^2}$$

2. m.k.s-A / SI

$$\begin{cases} [F]=N \\ [r]=meter \\ k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=10^{-7}c^2\approx 9\cdot 10^9 \\ c=3\cdot 10^8 m \end{cases} \Rightarrow F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

<u>קשר בין היחידות</u>

מתקיים: $1coulomb=3\cdot 10^9 esu$. כמו כן, מטען האלקטרון (-) שווה למטען הפרוטון (+), והוא $e=-4.8\cdot 10^{-10}esu\approx 1.6\cdot 10^{-19}coulomb$.
בהנתן מטען כלשהו Q, קיים $n\in\mathbb{N}$, כך ש $Q=n\cdot(\pm e)$.

<u>עקרון הסופרפוזיציה לגבי חוק קולון</u>

יהיו n מטענים חשמליים, כל מטען i מאופיין על ידי $q_i,\bar{r}_i$. נתעניין בכוח הפועל על מטען, שנסמנו בעזרת $q,\bar{r}$. נטען כי המטען q אינו מפעיל כוח על עצמו.
בעזרת **עקרון הסופרפוזיציה על חוק קולון**, נסכם את סכום הכוחות הפועלים על אותה נקודה:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r})=\sum_{i=1}^{n}\frac{q\cdot q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}$$

<u>שמות</u>

מקור: ווקטור $\vec{r}_i$ ומטען q_i .
מטען בוחן: q
קורדינטות השדה: $\vec{r}$

שדה חשמלי

תהיי מערכת מטענים $q_i, \overline{r_i}$. מערכת מטענים $\equiv$ התפלגות מטענים דיסקרטית. בתוך המרחב מערכת מטענים זו מפעילה מעין "שדה כוח".
תהיי נקודה כלשהי במרחב $\overline{r}$, ויהי q חלקיק קטן.

נכנה את השדה הווקטורי הבא בשם **שדה חשמלי:**

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{\vec{F}\left(\vec{r}\right)}{q}$$

השדה החשמלי הוא גודל שאינו תלוי ב-q.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_i)\right]$$

יחידות השדה:

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \begin{cases} \dfrac{dyne}{esu} = \dfrac{esu}{cm^2} & c.g.s \\ \dfrac{Newton}{Coulomb} = \dfrac{Coulomb}{m^2} & SI \end{cases}$$

<u>התפלגויות מטען רציפות</u>

א. התפלגות מטען מרחבית (נפחית)

יהי גוף, שאנו טוענים במטענים, כך שלכל נקודה בנפח זה יש מטען. אם ניקח אלמנט נפח קטן, נוכל להתייחס אליו כאל מטען נקודתי.
$\vec{r}'$ זוהי קורדינטת המקור, $d\tau'$ זהו אלמנט נפח של המקור, ואילו $dq(r')$ זוהי כמות המטען באלמנט הנפח $d\tau'$.

צפיפות מטען נפחית תוגדר כלהלן:

$$\rho(\vec{r}') = \frac{dq'(\vec{r}')}{d\tau'(\vec{r}')}$$

תרומת המטען $dq(\vec{r}')$ לשדה $\vec{E}(\vec{r})$:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\cdot\left(\widehat{\vec{r}-\vec{r}'}\right) = \frac{\rho(\vec{r}')\cdot d\tau'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\cdot\left(\widehat{\vec{r}-\vec{r}'}\right)$$

והשדה עצמו הוא:

$$\boxed{E(\vec{r}) = \int_{\tau}\frac{\rho(\vec{r}')\cdot\left(\widehat{\vec{r}-\vec{r}'}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}d\tau'}$$

ב. התפלגות מטען משטחית (משטח = עובי 0)

צפיפות מטען משטחית: $\sigma(\vec{r'}) = \frac{dq(\vec{r'})}{da(\vec{r'})}$, כאשר $da(\vec{r'})$ זהו גודל השטח של השטחון ב $\vec{r'}$.

כמות המטען במשטחון $da(\vec{r'})$ הינה: $dq(\vec{r'}) = \sigma(\vec{r'}) \cdot da(\vec{r'})$

יחידות: $[\rho] = \frac{esu}{cm^3}$ $[\sigma] = \frac{esu}{cm^2}$

השדה החשמלי:

$$E(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r'}) \cdot \left(\widehat{\vec{r}-\vec{r'}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^2} da$$

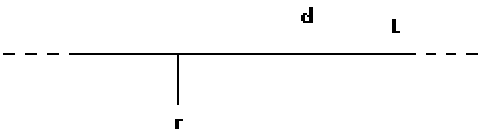
ג. התפלגות מטען קווית.

$$\lambda(\vec{r'}) = \frac{dq(\vec{r'})}{dl(\vec{r'})}$$

$$[\lambda] = \frac{esu}{cm}$$

$$E(\vec{r}) = \int_S \frac{\lambda(\vec{r'}) \cdot \left(\widehat{\vec{r}-\vec{r'}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^2} dl(\vec{r'})$$

<u>דוגמא</u> - תיל דק אינסופי



נדרוש: d << r << L.
כאשר L אורך החוט וd עובי החוט.

לבעיה סימטריה גלילית. נחשב במישור בנקודה r והתוצאה תהיה נכונה עבור כל נקודה במרחק r.

λ - צפיפות ליחידת אורך.

$$[\lambda] = \frac{esu}{cm}(c.g.s)$$
$$dq = \lambda dx$$

רכיבי x של השדות השונים הנובעים מכל נקודה מתאפסים, והרכיב היחידי שנשאר הוא בכיוון y.
מכאן:

$$\vec{E}(r) = E_r(r) \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = 2\int_0^\infty \frac{\lambda \cos(\theta) dx}{x^2 + r^2}$$

$\cos(\theta)$ נובע בגלל שאנחנו רוצים לקחת רק את הרכיב שבכיוון ציר y, ו x^2+r^2 נובע ממשפט פיתגורס.

נבצע הצבות:

$$x = rtg(\theta) \qquad dx = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta \qquad \Rightarrow x^2+r^2 = \frac{r^2}{\cos^2\theta}$$

$$\vec{\mathrm{E}}(r) = 2\int_0^\infty \frac{\lambda\cos^2(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)\cdot r^2}d\theta = \frac{2\lambda}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta) = \frac{2\lambda}{r}$$

<u>מסקנה:</u>

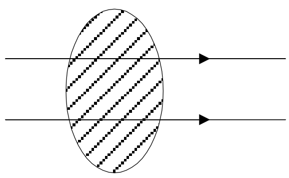
שדה של תיל דק אינסופי: $\boxed{\vec{\mathrm{E}}(r) = \frac{2\lambda}{r}}$

<u>שטף flux</u>

<u>דוגמא</u>

שטף – זרימה של נוזל. נגדיר $\bar{v}$ - מהירות הזרימה של נוזל.
שטף: ישנו שדה זרימה. כמה מים עוברים ליחידת זמן דרך משטח נתון?

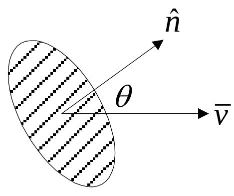
<u>מקרה 1</u>



כל הזרם בכיוון אחד במהירות קבועה. נציב משטח מישורי ששיטחו A.
נניח שצפיפות המים היא 1 בכל נקודה, ואז:

שטף מים = $\boxed{\left|\bar{V}\right|\cdot A}$

<u>מקרה 2</u>



ישנה זוית בין כיוון המשטח לכיוון הזרימה.
נסמן את כיוון המשטח על ידי נורמל $\hat{n}$.

שטף = $\boxed{\left|\bar{V}\right|\cdot\hat{n}\cdot A}$

<u>מקרה 3</u>

משטח עקום כלשהו בזוית כלשהי. נחלק את המשטח ליחידות קטנות.
השטף בנקודה כלשהי הוא: $\vec{\mathrm{E}}_i\cdot\Delta\vec{a}_i$, כאשר $\Delta\vec{a}_i$ זוהי יחידת שטח קטנה.
שטף על כל המשטח זהו למעשה אינטגרל משטחי על כל נקודות המשטח.

השטף של השדה $\vec{\mathrm{E}}$ דרך המשטח A:

$$\boxed{\Phi_E = \lim_{\substack{n\to\infty \\ MAX(|\Delta\vec{a}_i|)\to 0}}\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\cdot\Delta\vec{a}_i \equiv \int_A \vec{\mathrm{E}}d\vec{a}}$$

<u>שטף השדה החשמלי</u>

תהי $\rho(\vec{r}')$ פונקציה המתארת את צפיפות המטענים בכל נקודה במרחב.
בנקודה כלשהי $\vec{r}$ במרחב, ישנו שדה $\vec{E}(\vec{r})$, שהוא תוצאה של כל המטענים במרחב.
השדה משתנה בכל נקודה במרחב. נבנה משטח כלשהו במרחב.
בכל נקודה על המשטח, נגדיר אלמנט שטח קטן, על ידי גודל וכיוון. כיוון השטח – כיוון הנורמל שלו.

<u>הגדרה</u>: שטף השדה החשמלי דרך אלמנט שטח $d\vec{a}(\vec{r})$ יוגדר כלהלן:

$$d\phi(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}(\vec{r})$$

השטף של $\vec{E}$ דרך המשטח S:

$$\phi = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}(\vec{r})$$

ההגדרה הנ"ל היא חד ערכית עד כדי כיוון הנורמל.
כאשר S הינו משטח סגור, נגדיר את כיוון $d\vec{a}$ כלפי חוץ.
יחידות השטף:

$$[\phi] = [E][a] = \frac{esu}{cm^2} \cdot cm^2 = esu \Rightarrow$$

$$[\phi] = [q]$$

<u>חוק גאוס (Gauss)</u>

השטף של השדה $\vec{E}$ דרך המשטח הסגור S, הכולא נפח τ מחושב כלהלן:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_\tau \rho(\vec{r}')d\tau' = 4\pi Q$$

כאשר Q היא כמות המטען נטו הנמצאת ב-S.

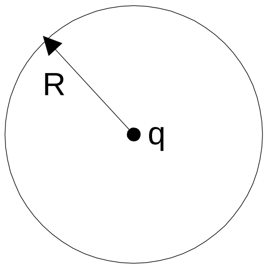
ב-S.I:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_\tau \rho(\vec{r}')d\tau'$$

הרצאה 2 – שטף חשמלי, גדיאנט ושדה וקטורי

<u>דוגמא</u>

מהו השטף של שדה חשמלי של מטען נקודתי q דרך מעטפת כדור (ברדיוס r), ש-q נמצא במרכזו?



נגדיר: A, המשטח שלנו, הוא כדור ברדיוס R. נשים לב שעקב הסימטריה של הבעיה, בכל נקודה $\vec{E}$ ו- $d\vec{a}$ מקבילים. מכאן: $\vec{E}\cdot d\vec{a} = Eda$.

ניגש לחישוב השטף:

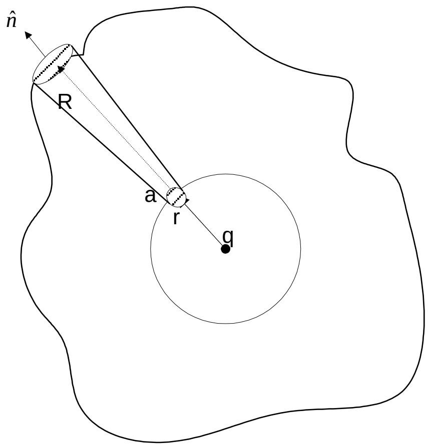
$$\Phi_E = \oint_A E d\vec{a} = \oint_A \frac{q}{R^2} da = \frac{q}{R^2}\oint_A da =$$

$$\frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q$$

$$\boxed{\Phi_E = \begin{cases} 4\pi q & c.g.s \\ \frac{1}{\varepsilon_0} q & m.k.s \end{cases}}$$

- שטף ליחידת שטח זוהי עוצמת השדה.

נכליל את התוצאה. ניקח משטח <u>סגור</u> כלשהו.
את המטען הכלוא בתוך המשטח, נעטוף בכדור דמיוני קטן הנמצא כולו בתוך המשטח.



נטען שהשטף העובר דרך a והשטף העובר דרך A זהה.

$$\Phi_a = E(r)\cdot a$$
$$\Phi_A = E(R)\cdot A\cos(\theta)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\Phi_a}{\Phi_A} = \frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{r^2}{R^2} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi_a = \Phi_A$$

מכאן נכליל ונאמר: A משטח סגור כלשהו, q מטען נקודתי בתוך המשטח. מתקיים:

$$\boxed{\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi q}$$

<u>שימושים לחוק גאוס</u> – חישוב $\vec{E}$ כאשר המקורות הם התפלגויות בעלות סימטריה.

א. התפלגות מטען בעלת סימטריה כדורית $\rho(\vec{r})=\rho(r)$.

עבור התפלגות מטען בעלת סימטרית כדורית, השדה הוא רדיאלי - $\vec{E}(\vec{r})=E(r)\hat{r}$. נבחר משטח גאוסי שהוא מעטפת כדורית ברדיוס r, שמרכזה במרכז ההתפלגות $\rho(r)$.
נסמן ב-S את שטח המעטפת, ואז:

$$\phi(R)=\int_{\text{Speare}}\vec{E}(r)d\vec{a}=E(r)\cdot S=4\pi r^2 E(r)=4\pi\int_{\tau}\rho(r)d\tau=4\pi Q(r)$$

כאשר $Q(r)$ היא כמות המטען בכדור שרדיוסו r.

$$\boxed{\vec{E}(r)=\frac{Q(r)}{r^2}\hat{r}}$$

<u>מקרים פרטיים:</u>

א1. מקור השדה הוא מטען Q המפולג בצורה אחידה על פני **מעטפת כדור ברדיוס R**.

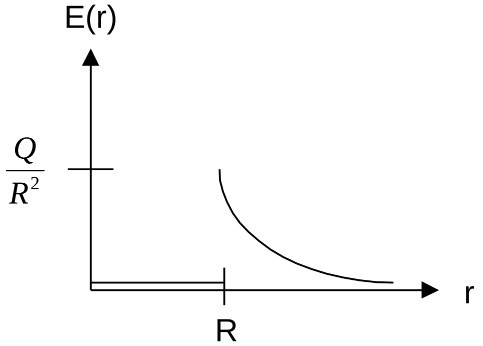
צפיפות המטען המשטחית:

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}\frac{esu}{cm}$$

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}0 & r<R\\ \frac{Q}{r^2}\hat{r} & r\geq R\end{cases}$$

נשים לב כי יש **אי רציפות ב-E על הקליפה.** מצד אחד של הקליפה השדה הוא 0, ומצידה השני השדה הוא $4\pi\sigma$.

<u>תוצאה כללית</u>: במעבר דרך שכבה דקה טעונה בצפיפות משטחית σ, רכיב $\vec{E}$ בניצב לשכבה עובר בצורה לא רציפה: $\Delta E=E^+-E^-=4\pi\cdot\sigma$.



א2. **כדור ברדיוס R טעון בצורה אחידה**, כך שמטענו הכללי Q.
צפיפות המטען הנפחית (מרחבית):

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\frac{esu}{cm^3}$$

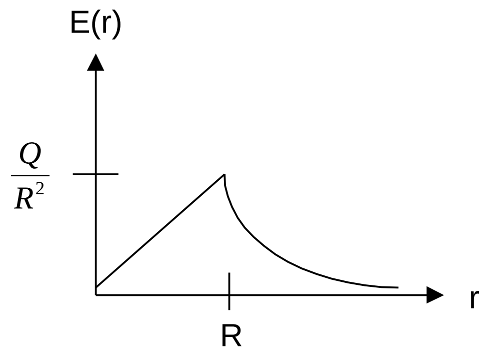
עבור $r < R$:

$$\mathrm{E}(r) = \frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho\frac{4\pi}{3}r^3}{r^2} = \frac{4\pi}{3}\rho r = \frac{Q}{R^3}\cdot r$$

נסכם:

$$\vec{\mathrm{E}}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R^3} r\hat{r} & r < R \\ \frac{Q}{R^2}\hat{r} & r > R \\ \frac{Q}{R^2}\hat{r} & r = R \end{cases}$$

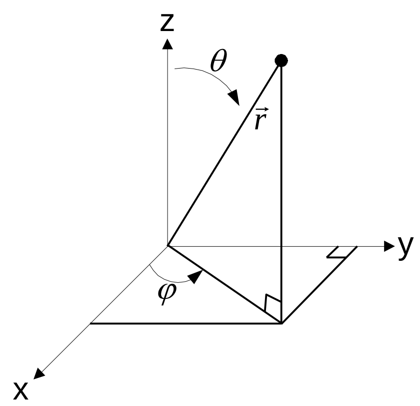
במקרה זה אין קפיצה בשדה החשמלי.



תרגול 1

א. קורדינטות כדוריות

נרצה לעבוד במקום עם קורדינטות קרטזיות $\left(x,y,z\right)$ עם קורדינטות כדוריות $\left(r,\theta,\varphi\right)$.



$$r\in\left[0,\infty\right]$$
$$\theta\in\left[0,\pi\right]$$
$$\varphi\in\left[0,2\pi\right]$$

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

כאשר אנו עובדים בקורדינטות קרטזיות, אלמנט נפח dv, שהוא למעשה קוביה קטנה, שווה ל- $dxdydz$: $dv=dxdydz$. כאשר אנו עובדים בקורדינטות כדוריות, אלמנט נפח קטן אינו בדיוק קוביה. מתקיים: $dv=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$. אם נתעניין באלמנט נפח על מעפטת כדור ברדיוס r, הרי שהוא $ds_r=rd\theta\cdot r\sin\theta d\varphi=r^2\sin\theta d\theta\varphi$.
(הגענו לביטויים עבור אלמנט הנפח ועבור אלמנט השטח, מנימוקים גיאומטריים).

הגדרה

שדה ווקטורי זוהי פונקציה, המתאימה ווקטור לכל נקודה במרחב.

תרגיל

נרצה לחשב את השטף דרך מעטפת כדור ברדיוס r, אשר במרכזה מצוי מטען q.
כידוע: $\phi=\int_S\vec{E}\cdot d\vec{s}$, כאשר S היא מעטפת הכדור.

$d\vec{s}$ היא פונקציה של x,y,z. $d\vec{s}$ זהו ווקטור המתאים לכל פיסת משטח שכיוונו החוצה מהפיסה, וגודלו כשטח הפיסה.

$$\phi=\int_S\vec{E}\cdot d\vec{s}=\int_S q\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot r^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r}=\int_S q\sin\theta d\theta d\varphi=q\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=$$
$$=2\pi q\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}=4\pi q$$

ב. גרדיאנט

הגרדיאנט מוגדר כך:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

<u>תרגיל</u>

חשב את $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)$.

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=$$

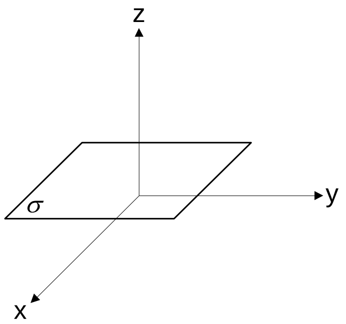
$$\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot 2x,-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot 2y,-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot 2z\right)=$$

$$=-\frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}}=-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=-\frac{|\vec{r}|\cdot\hat{r}}{|\vec{r}|^3}=-\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

הרצאה 3 – דוגמאות לחוק גאוס והפוטנציאל החשמלי

דוגמאות לחוק גאוס

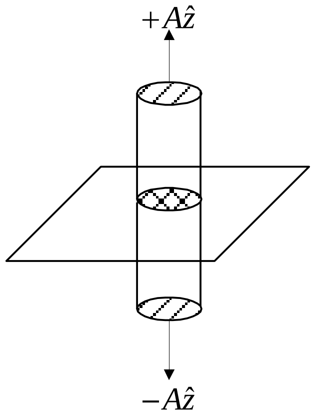
דוגמא 1



השדה הנובע מהתפלגות מטען שטחית אחידה $\sigma \frac{esu}{cm^2}$ על משטח ישר אינסופי. מתקיים:

$$\hat{E} = \hat{z} \qquad z > 0$$

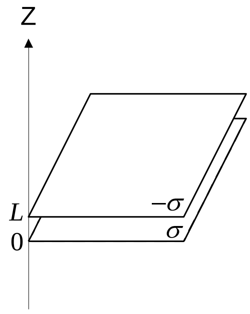
$$\hat{E} = -\hat{z} \qquad z < 0$$



ניקח משטח גאוסי שהוא גליל, שטח הבסיס שלו יסומן A. שטח החתך של הגליל עם המשטח הוא A.

השדה החשמלי ניצב ליריעה משני צדדיה. כמו כן, בנקודות P, P' הנמצאות על בסיסי הגליל, הכוח שווה והפוך בכיוונו.
מכיוון שהשדה בכיוון ניצב לגליל, שטף כלפי חוץ יהיה רק דרך בסיסי הגליל. השטף הינו $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$.
המטען הכלול בתוך הגליל הינו σA.
לפי חוק גאוס: $2AE_p = 4\pi\sigma A$, ומכאן: $E_P = 2\pi\sigma$

דוגמא 2



השדה החשמלי הנובע משני משטחים ישרים אינסופיים טעונים $-\sigma, +\sigma$:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 4\pi\sigma(+\hat{z}) & 0 < z < L \\ 0 & z > L \end{cases}$$

פוטנציאל חשמלי

טענה

בשדה אלקטרוסטטי E, לאינטגרל הקווי $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ יש אותו ערך על כל המסילות העוברות מ-P_1 אל-P_2.

טענה

בשדה אלקטרוסטטי E, האינטגרל הקווי $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ סביב כל מסלול סגור הוא אפס.

הגדרה

הפרש הפוטנציאלים בין הנקודות P_1 ו- P_2 הוא העבודה המבוצעת, ליחידת מטען, כאשר מעבירים מטען חיובי מ- P_2 אל P_1 בשדה E. את הפרש הפוטנציאלים הנ"ל נסמן φ_{21}. הפרש הפוטנציאלים הינו פונקציה סקלרית חד חד ערכית, והוא:

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

יחידות:

$$[\varphi] = \begin{cases} \dfrac{erg}{esu} = statvolt & CGS \\ volt & SI \end{cases}$$

מתקיים: 1[volt] = 1/300 [statvolt]

טענה והגדרה

נניח כי נבחר את P_1 באיזו נקודת ייחוס שהיא. φ_{21} תהיה אז פונקציה של P_2 בלבד, ואז נסמן את **הפוטנציאל** ב- $\varphi(x,y,z)$, ונזכור שבהגדרת הפונקציה כלולה בחירה של נקודת ייחוס מוסכמת P_1.

אנו אומרים כי φ היא הפוטנציאל הקשור בשדה הווקטורי $\vec{E}$. אם נתון $\vec{E}$, נקבעת פונקציה הפוטנציאל φ, עד כדי הוספת קבוע רצוני.

טענה

הפוטנציאל היא תמיד פונקציה רציפה.

הבהרה

האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת מטענים היא העבודה הכוללת, הדרושה על מנת להרכיב מערכת זו, כשמלכתחילה כל המטענים מרוחקים מאוד זה מזה.
הפוטנציאל החשמלי $\varphi(x,y,z)$ הקשור בשדה הוא העבודה, ליחידת מטען, על מנת להעביר מטען בוחן חיובי מנקודת ייחוס שנבחרה לנקודה (x,y,z). בשדה שכבר קיים.

תזכורת

בהינתן כוח $\vec{F}(\vec{r})$, העבודה בין שתי נקודות מוגדרת כך:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{L}$$

$$[W] = \begin{cases} erg & CGS \\ Joule & SI \end{cases}$$

טענה

הכוח החשמלי הוא כוח משמר, ומכאן מתקיים:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{L_1} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{L_2}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{L} = 0$$

<u>הגדרה</u>

אנרגיה פוטנציאלית תוגדר כך:

$$U\left(\vec{r_2}\right)-U\left(\vec{r_1}\right)=-\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{L}$$

<u>הכוח האלקטרוסטטי</u>

יהי אוסף של N מטענים נקודתיים - q_i, r_i , המפעילים כוח על מטען q, הנמצא בנקודה r, ונתון כי כתוצאה מכך q נע לאורך מסלול – מקורות הכוח יבצעו עבודה.
הכוח שכל מטען נקודתי q_i, r_i מפעיל על q הינו כוח מרכזי שכיוונו על הקו המחבר ביניהם.
נשתמש בעיקרון הסופרפוזיציה. תרומת q_i לכוח הכללי היא כוח מרכזי, ומכאן $\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}$ הוא כוח משמר. $\Leftarrow$ הכוח האלקטרוסטטי הוא משמר.

<u>הגדרה</u>

הגדרה נוספת ל**הפרש הפוטנציאלים**:

$$\varphi_{21}=\varphi(\vec{r}_2)-\varphi(\vec{r}_1)=\frac{1}{q}\left(U(r_2)-U(r_1)\right)=-\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}(r)d\vec{L}$$

<u>הפוטנציאל החשמלי הנובע ממטען q ב-r=0</u>

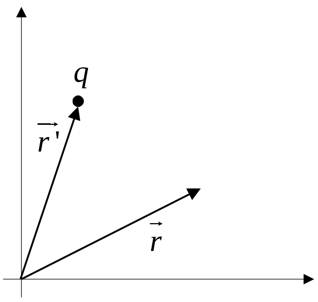
$$\varphi_{21}=-\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}(r)d\vec{L}=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{r^2}\hat{r}d\vec{L}$$

$$d\vec{L}=dL_r\hat{r}+dL_\theta\hat{\theta}$$

$$\varphi_{21}=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\left(dL_r\hat{r}+dL_\theta\hat{\theta}\right)=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{r^2}dL_r=-q\int_{r_1}^{r_2}r^{-2}dL_r=q\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

נגדיר את הפוטנציאל באינסוף להיות 0, ואז יתקיים כי: $\varphi(\vec{r})=\dfrac{q}{r}$

<u>הפוטנציאל החשמלי הנובע ממטען q הנמצא בנקודה כלשהי במרחב</u>



יהי מטען q הנמצא ב- $\vec{r}'$, אזי:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

הרצאה 4 – פוטנציאל ואנרגיה של התפלגות מטענים

פוטנציאל של התפלגות מטענים

טענה

עקרון הסופרפוזיציה תקף לגבי פוטנציאלים.
אם יש לנו מספר מקורות, וכאשר אנו מייחסים פוטנציאל אפס לנקודות שמרחקן מהמקור הוא אינסופי, אזי פונקצית הפוטנציאל הכללית תהיה הסכימה של פונקציות הפוטנציאל של המקורות השונים.

טענה

תהי $\rho(\vec{r}')$ המוגבלת לתחום סופי, וגם נקבע כי $\varphi(\infty)=0$, אזי מתקיים:

$$\boxed{\varphi(\vec{r})=\int_\tau \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

τ הוא הנפח אותו אנו רוצים לסכום. $d\tau'$ זהו אלמנט נפח. $\rho(\vec{r}')$ הינה צפיפות המטען בכל נקודה.

דוגמאות

א. הפוטנציאל הנובע מקליפה כדורית ברדיוס R, הטעונה בצורה אחידה, בעלת מטען ככלי Q.

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{Q}{r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$

על מנת להזיז מטען בתוך הקליפה, אין צורך להשקיע עבודה. נבחר $\varphi(\infty)=0$ ונקבל:

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{Q}{R} & r\le R\\ \dfrac{Q}{r} & r>R\end{cases}$$

נשים לב כי למרות שהשדה בתוך הקליפה הוא 0, הפוטנציאל אינו אפס, אלא קבוע.

ב. הפוטנציאל הנובע מכדור ברדיוס R, הטעון בצורה אחידה במטען כולל Q.

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{Q}{R^3}\cdot r\hat{r} & r<R\\ \dfrac{Q}{r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$

צפיפות המטען הינה $\rho=\dfrac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$.

נבחר $\varphi(\infty)=0$. מתקיים: $\varphi(R)=\dfrac{Q}{R}$

נביט ב- $\varphi(r)$ כאשר $r<R$:

$$\varphi(r)-\varphi(R)=-\int_R^r E(r')dr'$$

$$\varphi(r)=\varphi(R)-\int_R^r E(r')dr'=\frac{Q}{R}-\frac{Q}{R^3}\left[\frac{r'^2}{2}\right]_R^r=-\frac{Q}{2R^3}r^2+\frac{3Q}{2R}$$

נסכם:

$$\varphi(r)=\begin{cases}\frac{Q}{r} & r>R\\ \frac{Q}{R} & r=R\\ -\frac{Q}{2R^3}r^2+\frac{3Q}{2R} & r<R\end{cases}$$

ג. הפוטנציאל הנובע מתיל ישר אינסופי הטעון בצפיפות מטען אורכית אחידה $+\lambda\frac{esu}{cm}$.

הבעייתיות במקרה זה: איננו יכולים למקם את λ באינסוף. לפיכך, נמקם את האפס של הפוטנציאל בנקודה כרצוננו, שנסמנה r_1 .

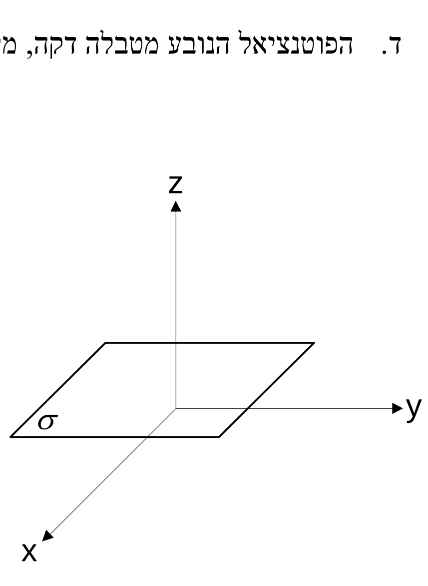
$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{2\lambda}{r}\hat{r}$$

$$\varphi(r_2)-\varphi(r_1)=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{2\lambda}{r}dr=-2\lambda\left(\ln r_2-\ln r_1\right)=2\lambda\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

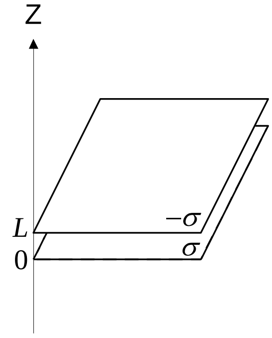
ד. הפוטנציאל הנובע מטבלה דקה, מישורית, אינסופית, הטעונה בצפיפות מטען אחידה $+\sigma\frac{esu}{cm^2}$.

$$\vec{E}(\vec{z})=\begin{cases}2\pi\sigma(+\hat{z}) & z>0\\ 2\pi\sigma(-\hat{z}) & z<0\end{cases}$$

$$\varphi(z_2)-\varphi(z_1)=-2\pi\sigma(z_2-z_1)$$



ה. הפוטנציאל הנובע משתי טבלאות מישוריות טעונות $-\sigma,+\sigma$:



$$\vec{E}(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ 4\pi\sigma(+\hat{z}) & 0<z<L\\ 0 & z>L\end{cases}$$

$$\text{when } 0<z_1,z_2<L:\varphi(z_2)-\varphi(z_1)=-4\pi\sigma(z_2-z_1)$$

מתחת ומעל הלוחות פוטנציאל אחיד. נבחר $z_1=0$ ונבחר $\varphi(0)=0$, ואז:

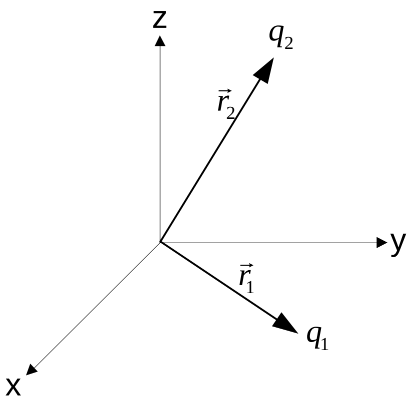
$$\varphi(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ -4\pi\sigma z & 0\le z<L\\ -4\pi\sigma L & z\ge L\end{cases}$$

<u>האנרגיה האצורה במערכת מטענים</u>

א. זוג מטענים נקודתיים

יהיו זוג מטענים q_1,q_2 , כך ש- $q_1\cdot q_2>0$.

גורם חיצוני מבצע עבודה להבאת q_1 אל r_1 ואת q_2 אל r_2.



$$\boxed{W=\frac{q_1q_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}=U_{12}}$$

<u>הסכם</u>

כאשר $q_1q_2>0$, נאמר כי $U_{12}>0$.

כאשר $q_1q_2<0$, נאמר כי $U_{12}<0$.

ב. 3 מטענים נקודתיים, N מטענים נקודתיים

נוסיף מטען נקודתי שלישי למערכת - q_3 . האנרגיה האצורה במערכת: $U=U_{12}+U_{23}+U_{31}$.

באופן כללי: האנרגיה האצורה במערכת של מטענים נקודתיים $q_i,r_i,i=1,...,N$ הינה:

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|},i\neq j}$$

נשים לב לפיתוח הבא של הביטוי:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\underbrace{\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}}_{\varphi_j(\vec{r}_i)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\underbrace{\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(\vec{r}_i)}_{\varphi(r_i)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi(r_i)$$

הביטוי החשוב הוא החלק השלישי של הפיתוח, בו אנו מסוגלים להשתמש בחישובים מעשיים.

<u>אנרגיה של התפלגות מטען רציפה בעלת ממדים סופיים</u>

תהי פונקציית הצפיפות של התפלגות המטען - $\rho(\vec{r})$ בעלת ממדים סופיים.
האנרגיה תוגדר כך:

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau d\tau'=\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\tau}$$

<u>דוגמא א'</u>

האנרגיה האצורה במערכת מטענים אינסופית היא $U=\infty$.

<u>דוגמא ב'</u>

האנרגיה האצורה בקליפה כדורית, בעלת רדיוס R, הטעונה בצורה אחידה בצפיפות משטחית σ.
מתקיים: $Q=4\pi R^2\sigma$

כדי לחשב את האנרגיה – נחשוב על טענה הדרגתית של הקליפה, כך שבכל רגע, המטען על הקליפה, q, מקיים $0<q\le Q$. ברגע מסויים, כאשר יש על הקליפה מטען q, נביא תוספת מטען - dq.
הפוטנציאל בנקודה $r=R$ כאשר הקליפה טעונה ב-q הוא $\varphi_q(R)=\frac{q}{R}$.
העבודה כנגד מטען dq: $dW=\varphi_q(r)dq=\frac{qdq}{R}$.

$$W=U=\int_0^Q\frac{qdq}{R}=\frac{Q^2}{2R}$$

<u>דוגמא ג'</u>

האנרגיה האצורה בכדור מלא בעל רדיוס R, וצפיפות מטען נפחית אחידה ρ. מתקיים: $Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$,
ניקח כדור קטן מלא, בתוך הכדור הגדול, בעל רדיוס $r<R$. מטען הכדור הינו $q(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$.
הפוטנציאל שהכדור משרה במרחב: $\varphi(r)=\frac{q(\vec{r})}{r}=\frac{4\pi r^2}{3}\rho$. נוסיף כעת אלמנט מטען לכדור.

$$dq(r)=\rho d\tau=\rho\cdot 4\pi r^2dr$$

$$dU=\varphi(r)\cdot dq(r)\Rightarrow dU=\left(\frac{4}{3}\pi r^2\rho\right)\cdot\left(\rho\cdot 4\pi r^2dr\right)=\frac{(4\pi\rho)^2}{3}r^4dr\Rightarrow$$

$$U=\frac{(4\pi\rho)^2}{3}\int_0^R r^4dr=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4\pi R^3\rho}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{R}=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$$

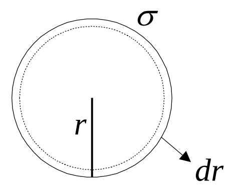
הרצאה 5 – צפיפות האנרגיה והשטף

צפיפות האנרגיה האלקטרוסטטית במרחב

צפיפות האנרגיה האלקטרוסטטית במרחב בכל מקום בו קיים $\vec{E}(\vec{r})$ (שדה חשמלי):

$$\frac{dU(\vec{r})}{d\tau}=\frac{1}{8\pi}E^2$$

נפתח את הנוסחה על ידי שימוש במקרה פרטי (המעיד על הכלל).
נביט כעת בקליפה כדורית דקה בעלת רדיוס r, אשר עליה (על הקליפה) צפיפות מטען אחידה σ.
פועל כוח החוצה (כי כל המטענים הם באותו סימן), ומטעמי סימטריה הכוח רדיאלי.
בתוך הקליפה ישנו שדה 0, ומחוץ לקליפה ישנו שדה.



נכווץ מעט את הכדור (תוך שמירה על סימטריה כדורית). המטען נשמר והצפיפות השתנתה קמעה.
השדה בחוץ נשמר. השינוי היחידי הוא שנוספה קליפה דקה בה יש שדה.

כוח ליחידת שטח: $f=E\cdot\Delta v\cdot\sigma$.
ידוע כי הקפיצה בשדה החשמלי במעבר בקליפה הוא: $\Delta E=4\pi\sigma$, ומכאן:

$$\sigma=\frac{\Delta E}{4\pi}$$

$$f=E\cdot\Delta v\cdot\sigma=E\cdot\Delta v\frac{\Delta E}{4\pi}=\frac{E_{out}+\overbrace{E_{in}}^{0}}{2}\cdot\frac{E_{out}-\overbrace{E_{in}}^{0}}{4\pi}=\frac{E_{out}{}^2}{8\pi}$$

שינוי אנרגיה פוטנציאלית: $dW=f\cdot 4\pi r^2=\frac{E^2}{8\pi}dV=dU$

אנרגיה ליחידת נפח:

$$U=\begin{cases}\int\frac{E^2}{8\pi}dV & CGS\\ \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\int E^2dV & SI\end{cases}$$

דוגמא א'

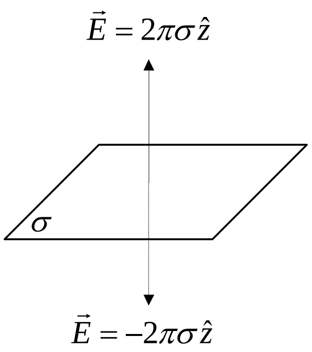
קליפה כדורית טעונה במטען Q.

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \frac{Q}{r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$

$$U=\int\frac{E^2}{8\pi}d\tau=\frac{1}{8\pi}\int_0^R\underbrace{E^2}_{=0}4\pi r^2dr+\frac{1}{8\pi}\int_R^\infty E^2 4\pi r^2dr=\frac{1}{8\pi}\int_R^\infty\frac{Q^2}{r^4}4\pi r^2dr=\frac{Q^2}{2}\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{Q^2}{2R}$$

קיבלנו את אותה תוצאה שקיבלנו בהרצאה הקודמת.

דוגמא ב'



נבצע אינטגרל על כל המרחב:

$$U=\int\frac{1}{8\pi}\left(2\pi\sigma\right)^2d\tau=\frac{\pi\sigma^2}{2}\int d\tau=\infty$$

יסודות האלקטרוסטטיקה

1. קיימים שני סוגי מטענים – חיובי ושלילי.
2. חוק קולון – $\bar{F}_{21}=k\cdot\frac{q_1q_2}{\left|\bar{r}_{21}\right|^2}\hat{r}_{21}$

מסקנות מהיסודות

1. חוק גאוס: $\int_S\vec{E}\cdot d\vec{a}=4\pi\int_\tau\rho d\tau$
2. חוק שימור האנרגיה: $\oint\vec{E}\cdot d\vec{L}=0\Rightarrow\varphi(\vec{r}_2)-\varphi(\vec{r}_1)=-\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{L}$

המטרה שלנו כעת: קבלת שני החוקים היסודיים בצורה דיפרנציאלית.

הגדרה

האופרטור **נבלה** יוגדר כך:

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

הגדרה

הגרדיאנט של פונקציה סקלרית $f(\vec{r})$ הינו:

$$\text{grad}f(\vec{r})=\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

משפט

יהי נפח V, שסוגר עליו משטח S, המחולק לשני חלקים, הכלואים על ידי S_1,S_2 . יהא אשר יהא מספר חלוקות המשנה, סכום האינטגרלים המשטחיים על כל החלקים שווה לאינטגרל המשטחי המקורי על S, עבור כל פונקציה וקטורית $\vec{F}(\vec{r})$.

צפיפות השטף של שדה וקטורי

יהי $\vec{F}(\vec{r})$ שדה וקטורי כלשהו. נבחר משטח סגור כלשהו S, שנפחו V, ונחשב את השטף של השדה:

$$\phi=\int_S \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{a}$$

נניח שאנו מחקים את הנפח V לשני חלקים באמצעות משטח, לשני חלקים V_1,V_2 .

לפי המשפט, סכום האינגרלים המשטחיים על שני חלקים אלו זהה לאינטגרל המקורי על כל S, אותו ביצענו לעיל. נמשיך לחלק שוב ושוב את הנפח שהתקבלו, עד שנחלק את V למספר גדול של נפחים - N.
אנו מנסים לזהות איזו תכונה אופיינית לאיזור קטן מסויים, כך שבגבול, כש-N שואף לאינסוף, היא תאפיין נקודה נתונה.

לפיכך, נביט בביטוי הבא: $\dfrac{\int_{S_i}\vec{F}\cdot d\vec{a}_i}{V_i}$.

נגדיר את **הדיברגנץ** בצורה הבאה:

$$\text{div}\vec{F}\equiv\lim_{V_i\to 0}\frac{1}{V_i}\int_{S_i}\vec{F}\cdot d\vec{a}_i$$

כאשר V_i הוא הנפח המכיל את הנקודה שבה מדובר, ו- S_i הוא המשטח הכולא את V_i .
זוהי למעשה פונקצית צפיפות השטף – שטף ליחידת נפח.

משפט גאוס

יהי שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$, ומשטח סגור S הכול נפח τ , אזי:

$$\phi=\int_S \vec{F}\cdot d\vec{a}=\int_\tau \text{div}\vec{F}d\tau$$

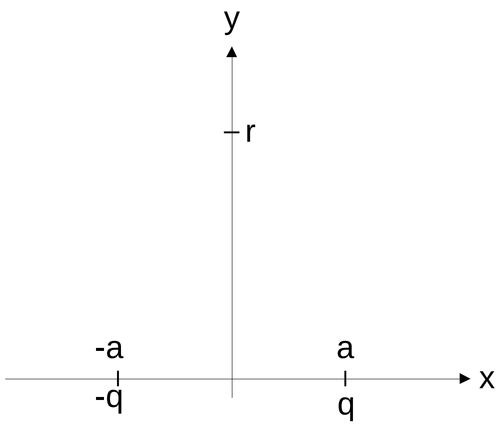
תרגול 2

1. יחידות

קשר שימושי:

$$\text{volt}=\frac{\text{c}}{\text{m}}\cdot \text{k}$$

2. דיפול



נרצה לדעת מספר נתונים על המערכת:

$E(0,r)=?$

$E(r,0)=?$

כמו כן נרצה לראות למה הביטויים מתקרבים, כאשר $r\gg a$ - כלומר, כאשר מזניחים ביטויים מהצורה $\left(\frac{a}{r}\right)^2$,

$$\vec{E}(0,r)=\frac{\left(-a\hat{x}+r\hat{y}\right)}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\cdot q-q\frac{\left(a\hat{x}+r\hat{y}\right)}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{-2aq}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\hat{x}$$

נקרב את הביטוי כאשר $r\gg a$.

$$\vec{E}(0,r)=\frac{-2aq}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\hat{x}=\frac{-2aq}{r^3\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)^{3/2}}\hat{x}\approx\frac{-2aq}{r^3}\hat{x}$$

דיפול יורד לפי r^3 !!

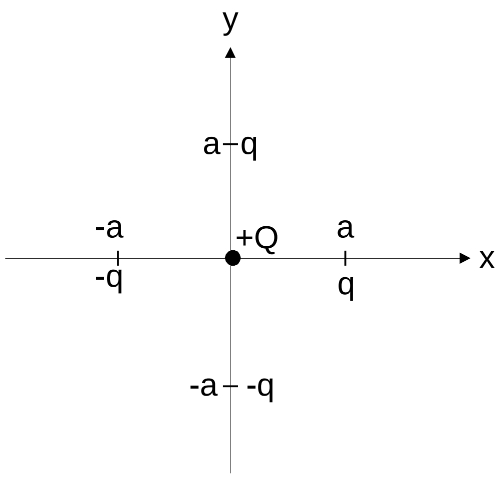
$$E(\vec{r},0)=...=q\hat{x}\cdot\left(\frac{1}{r^2\left(1-\frac{q}{r}\right)^2}+\frac{1}{r^2\left(1+\frac{q}{r}\right)^2}\right)$$

$$\boxed{(1+\alpha)^n=1+n\alpha+O(\alpha^2)\approx 1+n\alpha}$$

$$E(\vec{r},0)=\left(\frac{1-2\left(-\frac{a}{r}\right)}{r^2}-\frac{1-2\frac{a}{r}}{r^2}\right)q\hat{x}=\frac{4aq}{r^3}\hat{x}$$

3. <u>מערכת כמעט יציבה</u>

4 מטעני q מקובעים. מהו הכוח שיפעל על Q?



הכוח שפועל על Q הינו 0.

כעת נניח כי Q נמצא במרחק קטן כלשהו ממרכז המערכת על ציר x. נסמן את המרחק ב-x.

נמצא מהו הכוח הפועל על המטען Q בחלק זה.
נמצא מהי האנרגיה הפוטנציאלית כאשר Q נמצא ב-x - ($x \ll a$).
לאחר מכן נזכור כי $F=-\nabla U$, ונקבל כי הכוח הפועל על החלקיק הוא כוח הרמוני, ולכן המטען Q יתנדנד סביב הראשית.
לכאורה נראה כי אם Q בראשית הצירים, יהיה שיווי משקל יציב.
אם זאת, <u>באלקטרוסטטיקה אין שיווי משקל יציב</u>.
ההסבר: התעלמנו מציר Z – אם נזיז את החלקיק מעט על ציר Z, הוא יתחיל לברוח מהמערכת.

הרצאה 6 – אנליזה ווקטורית

אנליזה ווקטורית

פונקציה ווקטורית היא פונקציה מהצורה $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y,z)\hat{x} + F_y(x,y,z)\hat{y} + F_z(x,y,z)\hat{z}$.

הגדרה - הדיברגנץ

יהי נפח סופי V, ויהי המשטח הסוגר עליו S. נחלק את הנפח לנפחים קטנים $V_1, V_2, ..., V_N$ ואת המשטח למשטחים הסוגרים על הנפחים $S_1, S_2, ..., S_N$ בהתאמה.

הווקטור $d\vec{a}_i$ הוא ווקטור שגודלו כגודל השטח S_i וכיוונו ככיוון האנך כלפי חוץ לאותו אלמנט שטח.

הדיברגנץ יוגדר בצורה הבאה:

$$\boxed{\text{div}\vec{F} \equiv \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i}$$

הדיברגנץ נקרא גם "צפיפות השטף של השדה". הדיברגנץ מוגדר בכל נקודה במחרב ש- $\vec{F}$ מוגדרת בו.

משפט גאוס (המתמטי)

יהי נפח סופי V, ויהי המשטח הסוגר עליו S, אזי: $\boxed{\oiint_S \vec{E} d\vec{a} = \iiint_V \text{div}\vec{E} dv}$

כאשר $\vec{E}$ שדה ווקטורי כלשהו.

משמעות הביטוי $\oiint_S \vec{E} d\vec{a}$ היא השטף של הווקטור $\vec{E}$ דרך המשטח הסגור S.

חזרה – משפט גאוס (הפיסיקלי)

יהי נפח סופי V, ויהי המשטח הסוגר עליו S, אזי: $\boxed{\oiint_S \vec{E} d\vec{a} = 4\pi Q_{in}}$, כאשר $\vec{E}$ הוא השדה החשמלי.

מסקנות מחוק גאוס

החוק מקשר למעשה בין הדיברגנץ למקורות השדה. אם $div\vec{E} = 0$, אזי אין מקורות, ואם $div\vec{E} \neq 0$ יש מקורות. חוסר מקורות: האם יש מקורות לשדה בנפח שאנו כולאים, לא האם יש מקורות לשדה בכלל.

האופרטור נבלה

תזכורת: האופרטור **נבלה** מוגדר כך: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

הצגת הדיברגנץ בקורדינטות קרטזיות

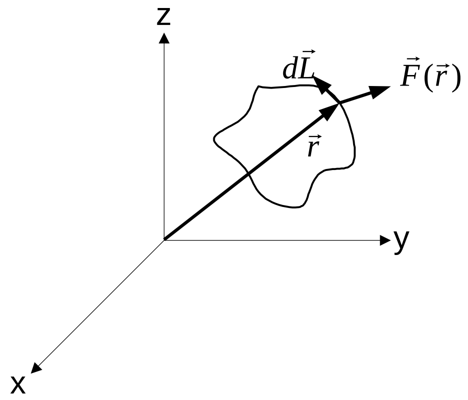
בקורדינטות קרטזיות, מתקיים:

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

נוכל לרשום את הדיברגנץ גם בצורה הבאה: $div\vec{F} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$

צורת כתיבה זו נכונה לא רק לגבי מערכת צירים קרטזיות, אם כי במערכות צירים אחרות, האופרטור נבלה מוגדר בצורה שונה.

<u>משפט סטוקס, סירקולציה, curl</u>



הגדרה:

נתונה פונקציה ווקטורית $\vec{F}(\vec{r})$ ומסלול סגור במרחב C.

סירקולציה תוגדר כך: $\Gamma = \oint_C \vec{F}d\vec{L}$.

עבור כוח משמר, הסירקולציה שווה 0.

<u>הגדרה</u>

צפיפות (משטחית) של הסירקולציה בכיוון הווקטור $\widehat{a_i}$:

$$\mathrm{curl}\vec{F}\cdot\vec{a}_i = \lim_{a_i\to 0}\left(\frac{\oint_{C_i}\vec{F}\cdot d\vec{L}_i}{a_i}\right) = \mathrm{rot}\left(\vec{F}\cdot\vec{a}_i\right)$$

משפט סטוקס:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{L} = \lim_{\substack{a_i\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\oint_{C_i}\vec{F}\cdot d\vec{L}_i}{a_i}\right) = \iint_S\left(curl\vec{F}\cdot\widehat{da}\right)da$$

S הינו משטח חלק ופתוח ששפתו C.
כיוון ההליכה על C: נלך על מסלול כך שנראה את המשטח מצד שמאל. כיוון הראש הוא כיוון הנורמל (כלל הבורג – סיבוב בורג ימני).

curl בקורדינטות קרטזיות:

$$curl\vec{F} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right] = \left[\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}\right)\right]$$

<u>מסקנות ממשפט סטוקס</u>

ראשית, נסכם את המשפט בצורה הבאה:

$$\boxed{\oint_C \vec{E}d\vec{L} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{E}da}$$

כמו כן: curl שווה אפס אם השדה החשמלי משמר, ומספר שונה מאפס אם לא.

הרצאה 7 – סיכום תכונות אנליטיות של השדה הווקטורי, שימוש לשדה האלקטרוסטטי, משוואות השדה האלקטרוסטטי

סיכום תכונות אנליטיות של שדה ווקטורי

יהי השדה הווקטורי $\vec{F}(\vec{r})$.

שדה ווקטורי – הערך בכל נקודה ונקודה משתנה בגודל ובכיוון. (דוגמאות: רוח, מים, שדה חשמלי).

צפיפות השטף – פונקציה סקלרית

$$\mathrm{div}\vec{F} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$$

צפיפות הסירקולציה – פונקציה ווקטורית

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$$

משפט גאוס – יהי נפח סופי V, ויהי המשטח הסוגר עליו S, אזי:

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{a} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}dv$$

משפט סטוקס – יהי S הינו משטח חלק ופתוח ששפתו C, אזי:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{L} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E}da$$

שימוש לשדה האלקטרוסטטי

חוק קולון:

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{\left|r_1 - r_2\right|^2}(\widehat{r_1 - r_2})$$

שדה אלקטרוסטטי:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

שדה חשמלי יורד לפי $\frac{1}{r^2}$, לכן מתקיים **חוק גאוס**:

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{a} = 4\pi\int_\tau \rho(\vec{r})d\tau = 4\pi Q_{in}$$

משפט גאוס לשדה החשמלי:
משפט גאוס מקשר בין השדה החשמלי בנקודה מסויימת לבין צפיפות המטען בנקודה.

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{a} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}dv = 4\pi\int_\tau \rho(\vec{r})d\tau \Rightarrow$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) = 4\pi\rho$$

כוח קולון הוא כוח מרכזי, ולכן הוא כוח **משמר**.
חוק שימור האנרגיה על מסלול סגור:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{L} = 0$$

משפט סטוקס:
מתקיים כי $\mathrm{curl}\vec{E} = 0$ תמיד.

$$\oint_C \vec{E}d\vec{L} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E}da = 0$$

חוק שימור האנרגיה:

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] = 0$$

משוואות השדה האלקטרוסטטי

חוק גאוס:

1. $\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi\int_\tau \rho(\vec{r})d\tau$
2. $\oint_C \vec{E}d\vec{L} = 0$

בצורה דיפרציאלית:

1. $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 4\pi\rho$
2. $\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = 0$

$\vec{E}$ הוא שדה משמר, ולכן ניתן להגדיר פונקציית פוטנציאל.
$\varphi(\vec{r})$ הינה **פונקציית פוטנציאל** אלקטרוסטטית (סקלרית).
מתקיים: $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi}$.

נציב בחוק גאוס:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\varphi\right)\right) = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi$$

נגדיר את **הַלַפְּלַסְיַן** עבור קורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

נמשיך את הפיתוח: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla^2\varphi = 4\pi\rho$

משוואות פואסון: $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$
המשוואה קושרת את צפיפות המטען לנגזרות השניות של הפוטנציאל.

משוואת לפלס:

בכל מקום בו $\rho = 0$, כלומר, בכל חלקי המרחב שאינם מכילים מטען חשמלי, הפוטנציאל החשמלי φ חייב לקיים את המשוואה: $\nabla^2\varphi = 0$. משוואה זו מכונה **משוואת לפלס**.

פתרון פורמלי למשוואת פואסון:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_\tau \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|r-r'|} + \varphi_0$$

כאשר $\vec{r}'$ הוא מקור, והפתרון נכון עבור התפלגות סופית.

משפט היחידות

נתונה משוואת לפלס $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ ותנאי שפה φ_0, אם $\varphi(r)$ מקיימת את המשוואה ומקבלת את ערכי השפה φ_0 אז היא פתרון יחיד.

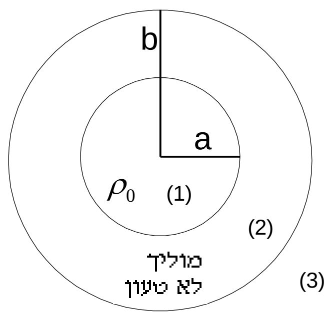
תרגול 3

הגדרה

הלפלסיאן יוגדר כך:

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

תרגיל



נתון גוף מבודד טעון, ומסביבו מוליך לא טעון.
נרצה למצוא את השדה ואת הפוטנציאל ב- (1), (2) וב-(3).

כללים

1. משוואת פואסון: $\vec{\nabla}^2\varphi = -4\pi\rho$.
2. הפוטנציאל הינו פונקציה רציפה.
3. השדה על פני מוליך: $\vec{E} = 4\pi\sigma\hat{n}$.
4. השדה בתוך מוליך: 0.
5. פוטנציאל על פני מוליך הוא קבוע.
6. עבור פוטנציאל רדיאלי:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(r) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

7. עבור פוטנציאל רדיאלי:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi(r)}{dr}$$

הערות על הכללים

לגבי 1, לכאורה הפוטנציאל בנקודה מסויימת תלוי רק במטען באותה נקודה. עובדה זו אכן נכונה, ומתקבלת מפיתוח המשוואה.
לגבי 3, נשים לב שמדובר על השדה השקול בכל נקודה, ולא רק בשדה הנובע מהמטען בנקודה זו.

<u>עבור (1)</u>

$r < a$:

$$\vec{\nabla}^2 \rho_1 = -4\pi\rho_0$$

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right) = -4\pi\rho_0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right) = -4\pi\rho_0 r^2$$

נעשה אינטגרל לשני האגפים:

$$r^2\frac{d\varphi_1}{dr} = -4\pi\rho_0\frac{r^3}{3} + c_1$$

חשוב לא לפספס את הוספת הקבוע.

$$\frac{d\varphi_1}{dr} = -4\pi\rho_0\frac{r}{3} + \frac{c_1}{r^2}$$

כעת אנו יכולים לדעת מהו E_1 :

$$\boxed{E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r - \frac{c_1}{r^2}}$$

מהסימטריה ידוע כי $E_1(0) = -\frac{c_1}{0} = 0$, ולכן מתקיים כי $c_1 = 0$

(נשים לב כי האפס במכנה זוהי שאיפה ל-0, ולא אפס ממש – פיסיקאים...).

$$\boxed{E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r}$$

$$\boxed{\varphi_1 = -\frac{4}{3}\pi\rho_0\frac{r^2}{2} + c_2 = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 + c_2}$$

<u>עבור (2)</u>

$a < r < b$:

$$E_2 = 0$$
$$\varphi_2 = \varphi'$$

כאשר φ' הינו קבוע.

<u>עבור (3)</u>

: $r > b$

מכיוון ש- $\rho = 0$, מתקיים כי $\vec{\nabla}^2\varphi_3 = 0$.

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_3}{dr}\right) = 0$$

$$r^2\frac{d\varphi_3}{dr} = c_3$$

$$\frac{d\varphi_3}{dr} = \frac{c_3}{r^2}$$

$$\boxed{\varphi_3 = -\frac{c_3}{r} + c_4}$$

ידוע כי הפוטנציאל באינסוף הוא 0, ולכן:

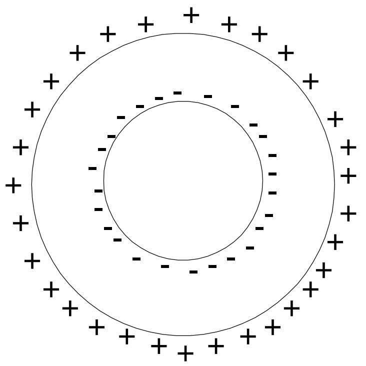
$$\varphi_3(\infty) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

השדה:

$$\boxed{E_3 = -\frac{c_3}{r^2}}$$

נרצה כעת להיפטר מהקבועים.
נשתמש ברציפות הפוטנציאל:

1. $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$.
2. $\varphi_2(b) = \varphi_3(b)$



ידוע כי המטען במוליך הוא 0, ולכן:

3. $4\pi\sigma_a a^2 + 4\pi\sigma_b b^2 = 0$

כאשר σ_a, σ_b הן צפיפויות המטען המשטחיות על שפות המוליך.

השדה על פני המוליך הינו $4\pi\sigma\hat{n}$, והוא שווה לשדה השקול בנקודה. השדה הינו E_3 . ומכאן:

4. $4\pi\sigma_b = E_3(b) = \frac{c_3}{b^2}$

כמו כן:

$$5. \quad -4\pi\sigma_a = E_1(a) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a$$

כעת נחלץ את הקבועים מהמשוואות.

$$-4\pi a^2\sigma_a = E_1(a) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$$

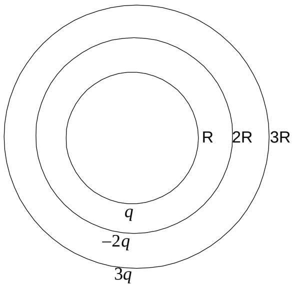
$$-4\pi b^2\sigma_b = c_3$$
$$\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3 + c_3 = 0$$
$$\varphi_1(a) = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 a^2 + c_2 = \varphi'$$
$$\varphi_2(b) = \varphi' = -\frac{c_3}{b}$$
$$c_3 = -b\varphi'$$
$$\varphi' = \frac{4}{3} p\rho_0 a^3 \cdot \frac{1}{b} = \frac{Q}{b}$$
$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$$
$$c_3 = -Q$$
$$c_2 = \frac{Q}{a} + \frac{2}{3}\pi\rho_0 a^2$$

שאלה נוספת: נרצה כעת לחשב את האנרגיה הכללית האצורה במערכת:

$$U = \int_V \frac{E^2}{8\pi} dv = \int_0^a \frac{E_1^{\,2}}{8\pi} dv + \cancel{\int_a^b \frac{E_2^{\,2}}{8\pi} dv} + \int_b^\infty \frac{E_3^{\,2}}{8\pi} dv$$

תרגילים

<u>תרגיל 1</u>



נתונות שלוש קליפות כדוריות מוליכות ובעלות רדיוסים R, 2R, 3R. הקליפות טעונות במטענים q, -2q, 3q בהתאמה. נדרש לחשב את הפוטנציאל במרחק R מהמרכז.

נחלק את המרחב ל-4 תחומים, כאשר תחום 1 במרכז הכדור, תחום 2 בין הקליפה הראשונה לשניה, תחום 3 בין הקליפה השניה לשלישית ותחום 4 מחוץ לקליפות.
ראשית נמצא את השדה בכל אחד מהתחומים:

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}0 & 0<r<R\\ \frac{q}{r^2}\hat{r} & R<r<2R\\ -\frac{q}{r^2}\hat{r} & 2R<r<3R\\ \frac{2q}{r^2}\hat{r} & 3R<r\end{cases}$$

$$\varphi_4(r)=-\int\frac{2q}{r^2}dr=\frac{2q}{r}+c_1$$
$$\varphi_4(\infty)=0+c_1=0\Rightarrow c_1=0$$
$$\Rightarrow\varphi_4(r)=\frac{2q}{r}$$

$$\varphi_3(r)=-\int-\frac{q}{r^2}dr=-\frac{q}{r}+c_2$$
$$\varphi_3(3R)=-\frac{q}{3R}+c_2=\varphi_4(3R)=\frac{2q}{3R}$$
$$c_2=\frac{2q}{3R}-\frac{q}{3R}=\frac{q}{3R}$$
$$\Rightarrow\varphi_3(r)=-\frac{q}{r}+\frac{q}{R}$$

$$\varphi_2(r)=-\int\frac{q}{r^2}dr=\frac{q}{r}+c_3$$
$$\varphi_2(2R)=\frac{q}{2R}+c_3=\varphi_3(2R)=-\frac{q}{2R}+\frac{q}{R}$$
$$c_3=0$$
$$\Rightarrow\varphi_2(r)=\frac{q}{r}$$
$$\varphi_2(R)=\frac{q}{R}$$

<u>תרגיל 2</u>

קליפה כדורית מוליכה בעלת רדיוס R_1 טעונה במטען Q. במרחק d ממנה נמצאת קליפה כדורית לא טעונה בעלת רדיוס R_2 . נתון כי $d \gg R_1, R_2$.
מחברים את שתי הקליפות בחוט מוליך דק.
נדרש לחשב את הפוטנציאל של שתי הקליפות.

המטען מתפצל לשני מטענים, q_1, q_2 , כאשר אנו מחברים את הקליפות בחוט.
מתקיים:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q \\ \dfrac{q_1}{R_1} = \dfrac{q_2}{R_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_1 = Q \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

הפוטנציאל:

$$\varphi = \frac{q_1}{R_1} = \frac{Q}{R_1 + R_2}$$

הרצאה 8 – אלקטרוסטטיות במוליכים ושיטת הדמויות

אלקטרוסטטיות במוליכים (אידיאלים)

מוליך אידיאלי זהו סוג של חומר, כך שתנועת מטענים בו נעשית ללא התנגדות. המטענים ישאפו לברוח אחד מהשני – יברחו לשפת הגוף. במוליכים אנו מקבלים מטענים רק על פני המוליך.
בתוך מוליך, השדה החשמלי הוא אפס, והמוליך הפוטנציאל החשמלי הוא קבוע (אחיד):

$$\varphi = \varphi_0, \vec{E} \equiv 0$$

על שפת המוליך קיים שדה חשמלי, הניצב לפני השטח: $\vec{E} = E(\vec{r}) \cdot \hat{n}$.
קיימת קפיצה ברכיב הניצב של השדה.

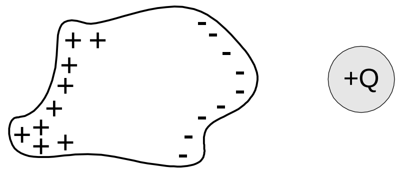
על שפת המוליך נוצרת **שכבת מטען** בצפיפות $\sigma(\vec{r})$. מתקיים: $\sigma(\vec{r}) = \frac{E_\perp(\vec{r})}{4\pi}$.

ניקח גוף מתכת מוליך ללא מטען התחלתי, ונטען אותו במטען Q על ידי מגע. (המטען יתפזר על פני המוליך).

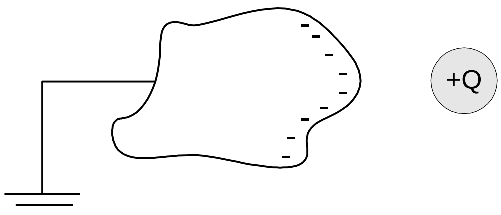
$$Q = \int_{\text{שפת המוליך}} \rho(r) d\vec{a} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{שפת המוליך}} \vec{E} d\vec{a}$$

טעינה על ידי השראה חשמלית

שלב א': מוליך שעל פניו $Q = 0$.
שלב ב': נקרב אל המוליך מטען חיובי +Q. המטען החיובי יפעיל כוח על האלקטרונים החופשיים בגוף. המטען הכללי שעל הגוף יישאר אפס. השדה $E = 0$, והפוטנציאל $\varphi = const$. עם זאת, התפלגות המטענים על הגוף תשתנה.



שלב ג': הארקה: נחבר את המוליך באמצעות תיל מוליך אל כלי קיבול חשמלי גדול מאוד.

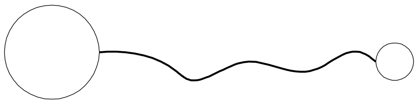


המטען הכללי על השפה Q-.

<u>שדה חשמלי ליד קצה חד</u>

המטען מתפזר על השפה.

מודל: שני כדורים מוליכים, מחוברים ביניהם בתיל מוליך:



מכיוון שהכדורים מחוברים, הפוטנציאל בהם שווה. נניח כי התיל המוליך אינו משפיע על התפלגות המטען בכדורים q_a, q_b .
מתקיים:

1. $q_a + q_b = Q$
2. $\frac{q_a}{a} = \frac{q_b}{b}$

(2) הוא למעשה שיוויון בפוטנציאלים.
מפתירת המשוואות נקבל:

$$\boxed{\begin{aligned} q_a &= Q \cdot \frac{a}{a+b} \\ q_b &= Q \cdot \frac{b}{a+b} \end{aligned}}$$

המטענים מתחלקים לפי רדיוס הכדורים:

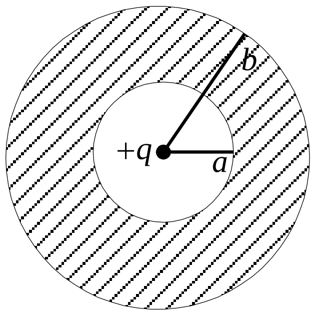
$$E(r=a) = E_a = \frac{q_a}{a^2} = \frac{Q}{a(a+b)}$$

$$E(r=b) = E_b = \frac{Q}{b(a+b)}$$

מכאן, שהשדה על חוד יכול להיות עצום, וזאת אם a קטן בהרבה מ- b .

דוגמא

טעינה על ידי השראה של קליפה כדורית עבה ומוליכה.
נשים מטען נקודתי $+q$ במרכז הקליפה.

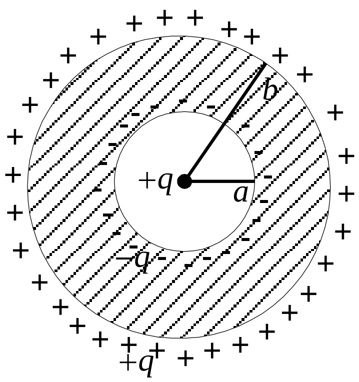


$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\frac{q}{r^2}\hat{r} & r<a\\ 0 & a<r<b\\ \frac{q}{r^2}\hat{r} & r>b\end{cases}$$

נבחר $\varphi(\infty)=0$.

$$\varphi(r)=\begin{cases}\frac{q}{r}+q\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) & r<a\\ \frac{q}{b} & a<r<b\\ \frac{q}{r} & r>b\end{cases}$$

נקבל בדיוק את אותה תוצאה אם נתאר את הבעיה בצורה הבאה:



$$\sigma(a)=-\frac{q}{4\pi a^2}$$
$$\sigma(b)=+\frac{q}{4\pi b^2}$$

סה"כ הקליפה נשארת נטרלית. אם נאריק את הקליפה, המטענים הטעונים q+ יברחו, ונשאר עם קליפה טעונה במטען q-. נאמר כי המטענים q+ הינם **המטענים החופשיים** של המערכת.
כעת:

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\frac{q}{r^2}\hat{r} & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

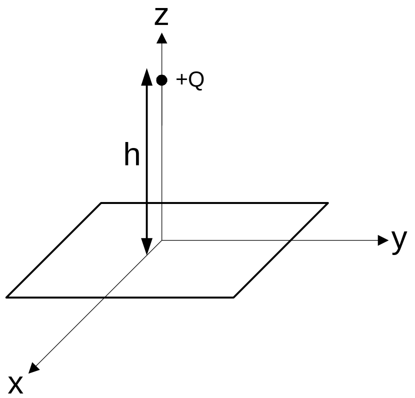
נבחר $\varphi(\infty)=0$.

$$\varphi(r)=\begin{cases}\frac{q}{r}-\frac{q}{a} & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

<u>שיטת הדמויות</u>

<u>דוגמא</u>

תהי טבלה מוליכה מישורית אינסופית מוארקת, ויהי מטען נקודתי Q+ במרחק h מהטבלה.

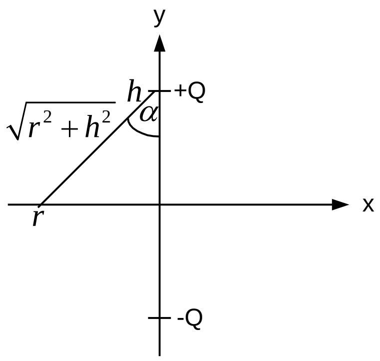


נרצה לדעת מהם $E(\vec{r}),\varphi(\vec{r})$. הטבלה נשארה עם מטען שלילי.
באפס צפיפות המטען הכי גדולה. מטענים מושרים על הטבלה
בצפיפות משטחית $-\sigma(\vec{r})$ (לא אחידה).
אם ננחש פתרון $\Leftarrow$ הוא יחיד.
תנאי השפה: $\varphi(z=0)=0$.
נדמיין שיש לנו מטען Q- במרחק h-. במערכת המוארקת
הפוטנציאל שנגרם מ- $+Q$ ומ- $-Q$ יתן אפס כאשר $z<0$.

ננסה פתרון של מטען דמות Q- בנקודה $z=-h$.

עבור $z\le 0$, מתקיים: $\varphi=0, E=0$ (כמו קליפה מוליכה שנסגרת על עצמה ב- ∞, השדה בפנים 0
והפוטנציאל נקבע לפי ההארכה ל-0. עבור $z>0$, מתקיים: $\varphi(\vec{r})=\frac{+Q}{|\vec{r}-h\hat{z}|}+\frac{-Q}{|\vec{r}+h\hat{z}|}$.

תנאי השפה מתקיים: לכל $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$ (כלומר $z=0$), $\varphi(\vec{r})=0$.
לפי משפט היחידות הפתרון שמצאנו הוא הפתרון היחידי. כיצד מתפלג המטען המושרה?
נחשב את השדה E ניצב על פני הטבלה $\vec{E}(\vec{r})=4\pi\sigma(\vec{r})(-\hat{z})$
.
נחשב את $\vec{E}$ במרחק r מנקודת ההיטל:



$$E(r)=\frac{-2Q}{\left(r^2+h^2\right)}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}=\frac{-2Q\cdot h}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}\Rightarrow$$

$$\sigma(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{-2Qh}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$$

לשדה הניצב קפיצה בשיעור $4\pi\sigma$ במעבר דרך התפלגות המטען המשטחית.
צפיפות המטען המושרה ב $\vec{r}$: $\sigma(\vec{r})=\frac{E_z(r)}{4\pi}$

צפיפות המטען הולכת וקטנה כש- $\vec{r}$ גדל (בערך לפי r^3): $\sigma(\vec{r})=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{Qh}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$

כמות המטען הכללית המושרת היא Q.

סיכום: השדה והפוטנציאל על כל נקודה במישור הם:

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{q\cdot(\vec{r}-h\hat{z})}{|\vec{r}-h\hat{z}|^3}-\frac{q\cdot(\vec{r}+h\hat{z})}{|\vec{r}+h\hat{z}|^3} & z>0\end{cases}\qquad \varphi(\vec{r})=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{+Q}{|\vec{r}-h\hat{z}|}+\frac{-Q}{|\vec{r}+h\hat{z}|} & z>0\end{cases}$$

nir@underwar.co.il

שיטת הדמויות - אלגוריתם רוטמן

השימוש בשיטה

כאשר יש התפלגות מטען שאיננו יודעים לחשב, אך את תנאי השפה של הפוטנציאל אנו יודעים לחשב.

השיטה

1. מציאת תנאי השפה של הפוטנציאל.
2. מיקום מטען דמות במקום הצפיפות הבעייתית אשר מקיימת את תנאי השפה.
3. מציאת הפוטנציאל.
4. פתרון זה נכון רק עבור תחום הבעיה שבו נמצא המטען המקורי (האמיתי).

הערה

במבחנים תמיד מנסים להפיל את הסטודנטים על ידי השאלה מהי האנרגיה האלקטרוסטטית האגורה במערכת, בהתחשב בזה שהסטודנט הטיפש הממוצע ייחשב שדה עבור כל היקום בעוד השדה האמיתי הוא עבור חצי יקום בלבד.

הרצאה 9 - קבלים

קבלים, קיבול

דוגמא

נתון כדור מוליך בעל רדיוס R הטעון במטען Q. נבחר $\varphi(\infty)=0$.

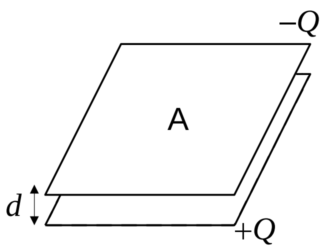
$$\varphi(R)=\frac{Q}{R}$$

$\Leftarrow$המטען קשור בקשר ליניארי עם φ כאשר קבוע הפרופורציה הוא תכונה גיאומטרית של הכדור: $Q=R\cdot\varphi(R)$.

עבור מוליך כלשהו: $Q=C\cdot\varphi$, כאשר C הינו הקיבול של המוליך. במקרה של כדור מוליך: C=R.

קיבול של מערך מוליכים

א. קבל טבלאות מוליכות.



ניקח שתי טבלאות מוליכות מקבילות, בעלות שטח A כל אחת, שהמרחק ביניהן הוא d.

הטבלה הראשונה טעונה במטען Q+ והשניה ב-Q-.

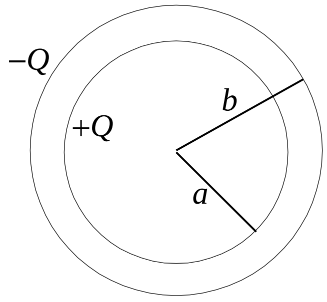
הנחת קירוב: $d\ll\sqrt{A}$.

נרצה למצוא קשר בין המטען לשדה. הטבלאות הן בקירוב אין סופיות, לכן E מחוץ לטבלאות הוא 0, ואילו E בין הטבלאות הינו $E=4\pi\sigma=\frac{4\pi}{A}Q$.

הפרש הפוטנציאלים הינו: $V=\left|\varphi_1-\varphi_2\right|=Ed=\frac{4\pi d}{A}Q$.

מתקיים: $Q=\frac{A}{4\pi d}V=CV\Rightarrow C=\frac{A}{4\pi d}$

ב. קבל של שתי קליפות מוליכות כדוריות בעלות מרכז משותף.



המטען החופשי Q = כמות המטען שיכולה לזרום עד שהפרש הפוטנציאלים ירד לאפס (אם אנו מחברים את הקליפות).

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{Q}{r^2}\hat{r} & a<r<b\\ 0 & r>b\end{cases}$$

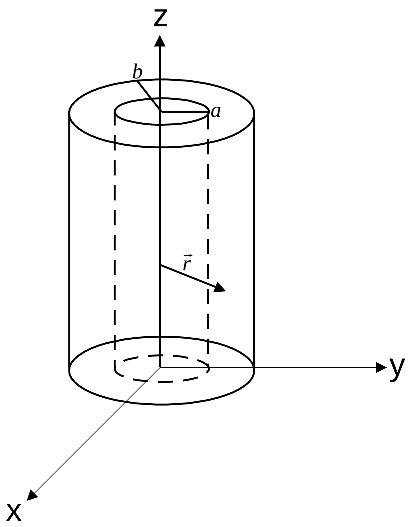
$$V=\left|\varphi(a)-\varphi(b)\right|=\left|\int_b^a\frac{Q}{r^2}dr\right|=Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow Q=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}V=CV$$

ומכאן: $C=\frac{ab}{b-a}$

אם נאריך את הקליפה החיצונית ($b\to\infty$): $C=\lim_{b\to\infty}\frac{ab}{b-a}=a$

ג. קבל גלילי: קבל של 2 קליפות מוליכות גליליות בעלות ציר אורך משותף.



שדה בהנחת קירוב של גלילים אינסופיים.
קירוב: $a<b\ll L$.

מחוץ לגליל, נוכל להתייחס אליו כתיל:
צפיפות מטען אורכית: $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$, $\lambda=\frac{Q}{L}$.

קיבול רדיאלי:

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{2\lambda}{r}\hat{r}=\frac{2Q}{Lr}\hat{r} & a<r<b\\ 0 & r>b\end{cases}$$

הפרש פוטנציאלים:

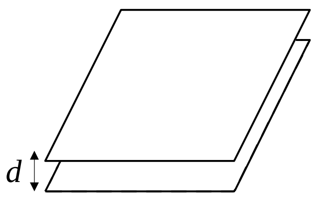
$$V=\left|\varphi(a)-\varphi(b)\right|=\left|-\int_b^a\frac{2Q}{Lr}dr\right|=\frac{2Q}{L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\Rightarrow Q=\frac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}=CV$$

$$C=\frac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

מקרה גבולי: $a,b\to\infty$.

מתקיים: $d=b-a$.

עבור קבל טבלאות:



$$C=\frac{A}{4\pi d}=\frac{L\cdot 2\pi b}{4\pi d}=\frac{Lb}{2d}=\frac{La}{2d}$$

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{b-a}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{d}{a}\right)\xrightarrow{\frac{d}{a}\to 0}\frac{d}{a}$$

$$C=\frac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\xrightarrow{\frac{b-a}{a}\to 0}\frac{L}{2\frac{d}{a}}=\frac{L\cdot\left(2\pi a\right)}{4\pi d}=\frac{A}{4\pi d}$$

סיכום

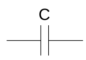
קבל לוחות:	$C=\dfrac{A}{4\pi d}$
2 קליפות כדוריות:	$C=\dfrac{ab}{b-a}$
כדור:	$C=R$
2 קליפות גליליות:	$C=\dfrac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

יחידות:

$$[C]=\begin{cases} cm & cgs \\ \dfrac{[Q]}{[v]}=\dfrac{Coulomb}{Volt}=Farad & SI \end{cases}$$

מתקיימים:

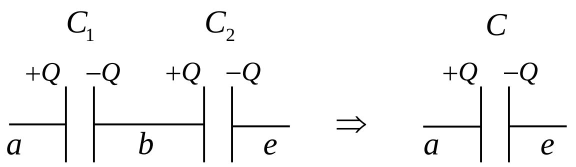
$$1Farad=\frac{3\cdot 10^{19}esu}{\frac{1}{300}statvolt}=9\cdot 10^{12}cm$$

סימון של קבל: 

$Q=CV_{ab}$ (Q הוא המטען החופשי על הקבל).

חיבור קבלים:

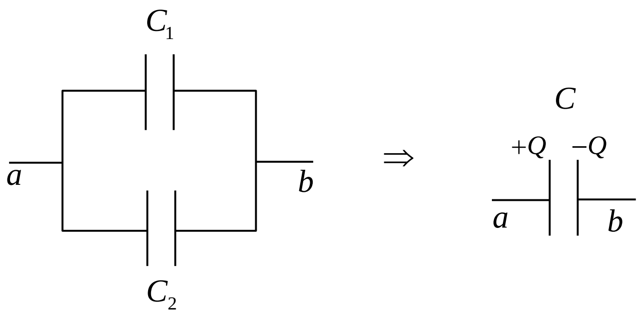
חיבור טורי:



מתקיימים:

$$V_{ae}=V_{ab}+V_{be}=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}=\frac{Q}{C}\Rightarrow\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

חיבור מקבילי:



מתקיימים:

$$Q=Q_1+Q_2=V_{ab}C_1+V_{ab}C_2=V_{ab}C\Rightarrow C=C_1+C_2$$

<u>אנגריה של קבל</u>

אנרגיה אצורה בקבל הטעון במטען כללי Q.

נטען את הקבל במטען $0<q<Q$. הפוטנציאל על הקבל כאשר המטען הוא q יהיה : $v(q)=\frac{q}{C}$.

נביא dq ואז נבצע עבודה: $dW=V(q)\cdot dq$.
העבודה שאנו משקיעים בטעינת קבל:

$$W=\int_0^Q V(q)dq=\int_0^q \frac{q}{c}\cdot dq=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}\cdot CV^2$$

נשים לב לעובדה הבאה:

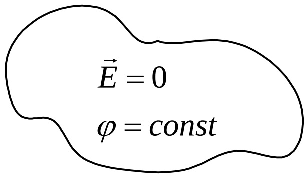
C היא תכונה פנימית של הקבל, ואילו V היא תכונה חיצונית. $\frac{1}{2}CV^2$ מזכיר אנרגיה קינטית.

הרצאה 10 – הזרם החשמלי, צפיפות הזרם, חוק אוהם

זרמים חשמליים

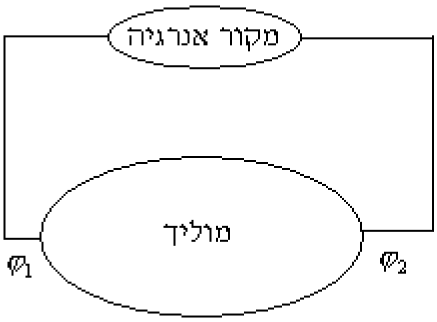
מטען נע בהשפעת שדה חשמלי בתוך חומרים מוליכים.

באלקטרוסטטיקה, המצב הבא היה נכון לגבי מוליכים:



מתקיים: $\rho(\vec{r})=0$, אולם $0\neq\sigma(\vec{r})=\frac{E_\perp}{4\pi}$

אם נרצה לקיים תנועת מטענים, נצטרך כל הזמן לדאוג שבמוליך יהיה שדה שונה מאפס. כדי לעשות זאת, נשתמש במקור אנרגיה היכול להניע מטענים - מקור כוח אלקטרו מניע - כא"מ.
על המקור לדאוג שיהיה כל העת הפרש פוטנציאלים על המוליך. $V=\varphi_1-\varphi_2\neq 0$.
במקרה כזה, השדה בתוך המוליך יהיה שונה מאפס.



על מטען q פועל כוח חשמלי: $\vec{F}=q\vec{E}$.

אלקטרודות: מוליכים אידיאלים המחברים בין מקור הכא"מ לבין החומר בו מתרחשת זרימת המוליכים.

<u>זרם וצפיפות</u>

זרם:

יהי חומר מוליך בו נעים מטענים ויהי S משטח פתוח במוליך.
יהי Q(t) כמות המטען החוצה את המשטח בזמן $(t,t+dt)$.
הזרם I דרך המשטח S יוגדר כך: $I=\frac{dQ}{dt}$

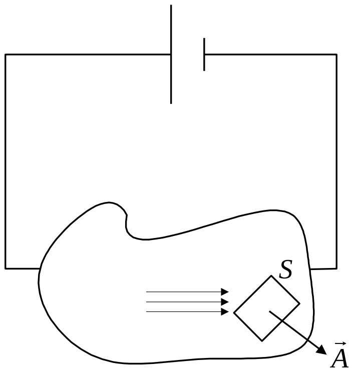
יחידות:

$$[I]=\begin{cases}\frac{[Q]}{[t]}=\frac{esu}{\sec} & cgs\\ \frac{coulomb}{\sec}=Ampere & SI\end{cases}$$

ומתקיים: $1Amp=3\cdot10^9\frac{esu}{\sec}$.

צפיפות הזרם:

כל מוליך מכיל "נושאי מטען".
נושאי המטען: במתכת - אלקטרונים. בתמיסה אלקטרוליטית - מלח במים.
נושא מטען מאופיין על ידי מסה m_j, מטען q_j ומהירות $\vec{u}_j$.
ישנם סוגים שונים של נושאי מטען: $j=1,2,\dots,k$. צפיפות נושאי המטען מסוג j: $n_j cm^{-3}$.



ניקח משטח ישר S. בזמן dt יחצו את המשטח $n\cdot\vec{u}\cdot dt\cdot\vec{A}$ נושאי מטען.
המטען שעובר הינו dQ: $dQ=q\left(n\cdot\vec{u}\cdot dt\cdot\vec{A}\right)$
והזרם: $I=\frac{dQ}{dt}=q\cdot n\cdot\vec{u}\cdot\vec{A}$

הזרם הינו תלוי במשטח ובתכונות נושאי המטען.

ווקטור צפיפות הזרם יוגדר כך: $\vec{J}=q\cdot n\cdot\vec{u}$
מתקיים: $I=\vec{J}\cdot\vec{A}$

יחידות:

$$[J]=\frac{[I]}{[a]}=\begin{cases}\dfrac{esu}{\sec\cdot cm^2} & cgs\\ \dfrac{Amp}{m^2} & SI\end{cases}$$

כאשר ישנם סוגים שונים של נושאי מטען מתקיים:

$$\vec{J}=\sum_{j=1}^{k}n_j\cdot q_j\cdot\vec{u}_j$$

<u>טענה</u>

עבור משטח פתוח S כלשהו, מתקיים כי: $I=\int_S\vec{J}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}$

<u>חוק שימור המטען ומשוואת הרציפות</u>

נתון חומר מוליך - משטח סגור S הכולא נפח τ .
כמו כן נתונה צפיפות הזרם: $\vec{J}(\vec{r},t)$.
מהו הזרם היוצא ממשטח זה?

הזרם הכללי היוצא מהמשטח: $I=\int_S \vec{J}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}$.

הזרם היוצא מהשטח שווה לקצב הירידה בכמות המטען הכלוא בנפח τ .

$$I=-\frac{dQ(t)}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_\tau \rho(\vec{r},t)d\tau$$

משוואת הרציפות האינטגרלית:

$$\int_S \vec{J}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}=-\frac{d}{dt}\int_\tau \rho(\vec{r},t)d\tau$$

זוהי בעצם צורה נוספת לחוק שימור המטען.

נשתמש במשפט גאוס:

$$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}=\int_\tau div\vec{J}d\tau=\int -\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$$

משוואות הרציפת בצורה דיפרנציאלית:

$$div\vec{J}=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

מקרה פרטי: זרם סטציונרית (עמידה)

$$\frac{d\rho}{dt}=0\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$$

דרך S סגור מתקיים כי I=0.

<u>חוק אוהם</u>

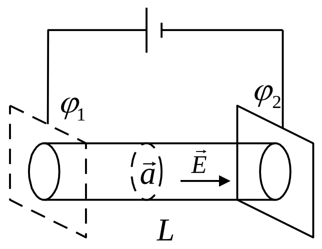
משוואת התנועה (ניוטונית) עבור נושא מטען אחד בשדה $\vec{E}$: $m\dot{\vec{u}}=q\vec{E}$.
תוצאה: קיים קשר ישיר בין השדה החשמלי לתאוצה.
בחומרים מוסיימים מתקיים חוק אום, המציג קשר ישיר בין השדה החשמלי אל המהירות:

$$\boxed{\vec{J}=\sigma\vec{E}}$$

כאשר σ היא המוליכות הפנימית (המוליכות הסגולית).
σ היא אחידה, איזוטרופית וקבועה.
התפלגות השדה $\vec{E}(\vec{r})$ ו- $\vec{J}(\vec{r})$ נקבעים על ידי הצורה הגיאומטרית של האלקטרודות.

מקרה פרטי:

מוליך σ בצורת גליל ישר, שטח חתך $\vec{a}$ ובעל אורך L.
מתקיים: $V = \varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot L$.



נשתמש בחוק אום: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ דרך שטח החתך a.

$$I = \vec{J} \cdot \vec{a} = J \cdot a$$

$$I = \sigma E a$$

$$E = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{L} = \frac{V}{L}$$

$$I = \sigma \frac{A}{L} \cdot V = \frac{V}{R}$$

נגדיר את **ההתנגדות:**

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{A}$$

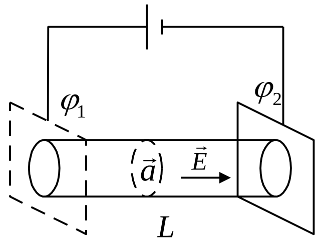
קיבלנו צורה נוספת לחוק אום:

יחידות:

אלמנט	CGS	MKS
$[I] = \frac{[q]}{[t]}$	$\frac{esu}{\sec}$	$\frac{coulomb}{\sec} = Ampere$
$[J] = \frac{[I]}{[a]}$	$\frac{esu}{cm^2 \cdot \sec}$	$\frac{Amp}{m^2}$
$[\sigma] = \frac{[J]}{[E]}$	$\frac{1}{\sec}$	$(ohm \cdot m)^{-1}$
$[\rho] = \frac{1}{[\sigma]}$	$\sec$	$ohm \cdot m$
$[R] = [\rho]\frac{[L]}{[a]}$	$[\rho]\frac{[L]}{[a]} = \frac{\sec}{cm}$	$\frac{[V]}{[I]} = \frac{volt}{Amp} = Ohm = \Omega$

הרצאה 11 – מעגלים, חוק ג'אול, חוקי קירכהוף, תרגילים

מוליכים המקיימים את חוק אוהם



מוליך σ בצורת גליל ישר, שטח חתך $\vec{a}$ ובעל אורך L.

נשתמש בחוק אום: $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ דרך שטח החתך A.

$$I=\frac{V}{R}$$

$$R=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{L}{A}=\rho\frac{L}{A}$$

דוגמא

נרצה לחשב את ההתנגדות של כדור מוליך מלא. המוליכות הסגולית של הכדור היא σ, והרדיוס שלו הוא R_1.

מתקיים: $R=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{L}{A}=\rho\frac{L}{A}$.

ניקח קליפה כדורית דקה בעלת רדיוס r ונחשב את ההתנגדות שלה.

$$dR=\frac{1}{\sigma}\frac{dr}{4\pi r^2}$$

כעת dr הוא למעשה המרחק שעברנו כדי לחצות את הקליפה, ו- $4\pi r^2$ זהו השטח שלה.

נבצע אינטגרל על מנת לקבל את כל הקליפה:

$$R=\int_V dR=\int_0^{R_1}\frac{1}{4\pi\sigma r^2}\cdot r^2\sin\theta dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{\sigma}\cdot R_1$$

מודל Drude

המוליך מורכב מ- $j=1,...,k$ סוגים של נושאי מטען $m_j,q_j,n_j,<\vec{u}_j>$.

כמו כן המוליך מכיל מולקולות נטרליות שבהן מתנגשים נושאי המטען.

משוואות התנועה לנושע מטען אחד מסוג j:

מהירות רגעית: $\vec{u}_j^i(t)$

$$m\underbrace{\dot{\vec{u}}_j^i}_{\vec{a}}=\underbrace{q\vec{E}_j}_{\vec{F}}$$

$$\vec{u}_j^i(t)=\vec{u}_j^i(0)+\frac{q_j}{m_j}\vec{E}\cdot t$$

תזכורת:

$\langle b_j\rangle$ הוא הממוצע של גודל פיסיקלי b: $\langle b_j\rangle=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}b_j^i$

ממוצע המהירויות:

$$\langle\vec{u}_j\rangle=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\vec{u}_j^i(0)+\frac{q_j}{m_j}E\left(\frac{1}{n_j}\sum_{j=1}^{n_j}t_j^i\right)$$

נגדיר t=0 רגע ההתנגשות האחרונה של נושא המטען i, ונגדיר t_j^i משך הזמן עד ההתנגשות הבאה.

הזמן הממוצע בין התנגשויות עבור סוג j: $\tau_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} t_j^i$

$$\left\langle \vec{u}_j^i(0) \right\rangle \equiv \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\vec{u}_j^i(0) = 0$$

ולכן אנו מקבלים כי:

$$\left\langle \vec{u}_j \right\rangle = \frac{q_j \tau_j}{m_j}\vec{E}$$

$$\vec{J} = \sum_{j=1}^{k} q_j n_j < \vec{u}_j > = \left(\sum_{j=1}^{k} n_j \frac{q_j^2 \tau_j}{m_j} \right) \cdot \vec{E}$$

כאשר $\sum_{j=1}^{k} n_j \frac{q_j^2 \tau_j}{m_j}$ זוהי למעשה תכונה של החומר. נסמן: $\sigma = \sum_{j=1}^{k} n_j \frac{q_j^2 \tau_j}{m_j}$, ואז יתקיים כי: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

<u>חוק Joule</u>

אנרגיה הופכת לחום בזמן הזרימה במוליך.

הספק הכוח החשמלי $q_j\vec{E}$ הפועל על נושא מטען אחד:

כללית: $P = \vec{u}\cdot\vec{F}$ (כוח כפול מהירות). $\left\langle p_j \right\rangle = \left\langle \vec{u}_j \right\rangle \cdot q_j \vec{E}$

הספק (חום) ליחידת נפח:

$$\frac{\Delta P}{\Delta \tau} = P' = \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\left(n_j \cdot < \vec{u}_j > \cdot q_j \right)}_{\vec{J}} \cdot \vec{E}$$

$$P' = \vec{J}\cdot\vec{E} = \sigma E^2$$

יחידות:

$$\left[P' \right] = \begin{cases} \dfrac{erg}{\sec \cdot cm^3} & cgs \\ \dfrac{Watt}{m^3} & SI \end{cases}$$

הספק החוק בקטע תיל מוליך:

$$P = \Delta\tau \cdot P'$$

$$P = ALJE = \underbrace{\left(AJ \right)}_{I} \cdot \underbrace{\left(EL \right)}_{V}$$

$$P = I \cdot V = \frac{V^2}{R} = I^2 R$$

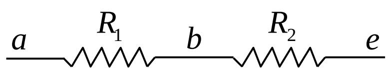
<u>נגדים</u>

סימון ההתנגדות = נַגָד

$$R = \_\_\,\Omega$$

<u>חיבור נגדים</u>

חיבור טורי:

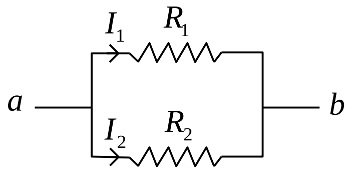


$$\Updownarrow$$

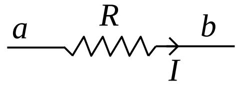
מתקיים:

$$V_{ae} = V_{ab} + V_{be} = IR_1 + IR_2 = IR$$
$$\Rightarrow R = R_1 + R_2$$

חיבור במקביל:



$$\Updownarrow$$



מתקיים:

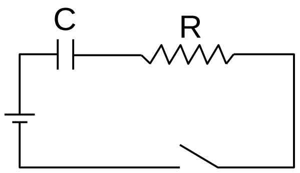
$$I = I_1 + I_2$$
$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

<u>מעגלי זרם - חוקי קירהוף</u>

1. חוק המעגל: $\sum_i \varepsilon_i = \sum_j I_j R_j$
2. חוק הצומת: $\sum_k I_k = 0$

<u>מעגל זרם המכיל מקור כא"מ (כוח אלקטרו-מניע), קבל ונגד</u>

<u>א. טעינת קבל</u>



$Q(t)$ המטען שעל הקבל, $I(t)$ הזרם במעגל.
בזמן $t<0$ מתקיים: $I(t)=0$ וכמו כן מתקיים כי $Q(0)=0$.
ברגע $t=0$ המפסק נסגר.

$$\varepsilon=\frac{Q(t)}{C}+RI(t)$$
$$I(t)=\frac{dQ}{dt}$$
$$\varepsilon=\frac{Q}{C}+R\frac{dQ}{dt}$$
$$\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{\varepsilon}{R}$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=0$$
$$Q(t)=\alpha\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

פתרון פרטי של המשוואה האי הומוגנית:

$$\frac{dQ}{dt}=0\Rightarrow Q_2=C\varepsilon$$
$$Q(t)=Q_1+Q_2=\alpha e^{-\frac{t}{RC}}+C\varepsilon$$
$$Q(0)=0\Rightarrow\alpha=-C\varepsilon$$

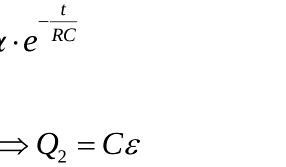
סיכום:

טעינת קבל:

$$\boxed{\begin{array}{l}Q(t)=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\\ I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\end{array}}$$

RC נקרא קבוע הזמן של המעגל (ל-RC מימדים של זמן).

<u>ב. פריקת קבל</u>



ב- $t=0$ מתקיים: $Q(0)=Q_0$.
באותו רגע המפסק נסגר.

מתקיים: $Q(t)=Q_0e^{-\frac{t}{RC}}$

העבודה המבוצעת בזמן טעינת הקבל על ידי מקור הכא"מ:

$$W=\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^\infty \varepsilon I(t)dt=C\varepsilon^2$$

האנרגיה העצורה בקבל בסוף הטעינה:

$$U=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

<u>חוק Joule</u>

$$W_{Joule}=\int_0^\infty I^2Rdt=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

<u>נגד עם אלקטרודות בעלות צורה סימטרית</u>

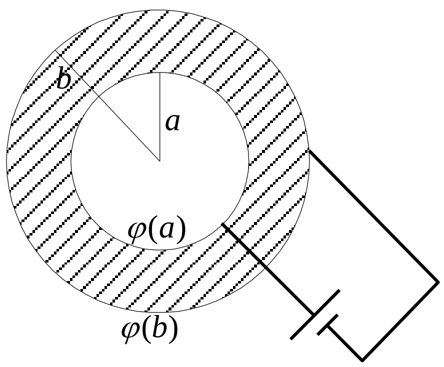
<u>א. נגד כדורי</u>

בין האלקטרודות תווך מוליך.
נתון:

$$\varphi(a)-\varphi(b)=V$$

$$\vec{E}=\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} \qquad a<r<b$$

כאשר α קבוע כלשהו.



תכונות מוליך המקיים את חוק אום היא $\vec{J}=\sigma\vec{E}$, לכן:

$$\vec{J}=\sigma\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$$

ידוע כי $V=\varphi(a)-\varphi(b)$. נמצא את V בהתאם לנתוני השאלה:

$$V=\varphi(a)-\varphi(b)=\left|-\int_b^a \frac{\alpha}{r^2}dr\right|=\alpha\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

נשים לב כי ניתן להעלים את α מהמשוואה:

$$\vec{J}=\sigma\frac{V}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

הזרם הוא למעשה צפיפות הזרם כפול השטח, לכן:

$$I(r)=J(r)4\pi r^2=\frac{\sigma}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}\cdot 4\pi V$$

קיבלנו מידע חשוב: הזרם אחיד ואינו תלוי ב-r!!

מחוק אום ידוע לנו כי $I=\frac{V}{R}$. נוכל להשתמש בכך על מנת למצוא את <u>התנגדות הקבל (נגד) הכדורי:</u>

$$R=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

אם נטען את הקליפות הכדוריות ב- $+Q_0,-Q_0$ המטען יזרום דרך ההתנגדות הכדורית: $Q=Q_0e^{-\frac{t}{RC}}$,
כאשר מתקיים כי $RC=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{1}{4\pi\sigma}$.

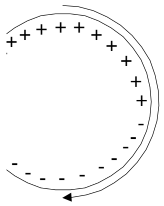
תרגילים

<u>שאלה</u>

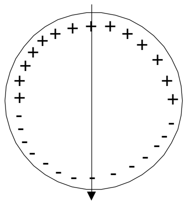
קליפה כדורית דקה מאוד ומבודדת שמרכזה בראשית הצירים, בעלת רדיוס R טעונה בצפיפות משטחית המשתנה עם הזווית θ (ביחס לציר z) לפי $\sigma(\theta)=\sigma_0\sin(\theta)$. מהי העבודה שיש להשקיע כדי להעביר מטען נקודתי q מהנקודה $\vec{r}_1=R\hat{z}$ אל הנקודה $\vec{r}_2=-R\hat{z}$? (שתי הנקודות הינן מחוץ לקליפה).

<u>תשובה</u>

חשוב לשים לב כי שתי הנקודות הן מחוץ לקליפה.
לפי חוק גאוס, מספיק שאנו במרחק dr מהקליפה, אנו יכולים להתייחס אליה כאל מטען נקודתי.
נראה שתי גישות לפתרון.
גישה אחת היא הליכה במסלול כזה הנראה בשרטוט:
אנו יכולים להתייחס אל הקליפה כאל מטען נקודתי.
המטען הכולל בתוך הקליפה הוא אפס. לפי גאוס $\iint \vec{E}da=4\pi Q$.



שימו לב: ע"פ חוק גאוס ניתן **להמיר את הבעיה**, כאשר דנים מחוץ לקליפת הכדור ב- dr לפחות, לבעיה של מטען נקודתי שלא משנה מה ערכו לצורך הדיון (נניח q). השדה של הבעיה החדשה הוא $\bar{E}=\frac{q}{r^2}\hat{r}$ והפוטנציאל $V=\frac{q}{r}$. אנו יכולים לדון רק בנקודות שמחוץ למעטפת הכדור. הסימטריה היא רדיאלית שכן אנו דנים במטען נקודתי. במסלול שתואר עוברים לאורך כל הדרך בפוטנציאל זהה ועל כן העבודה אפס.



נוכל גם לבצע את המסלול הבא בין הנקודות:

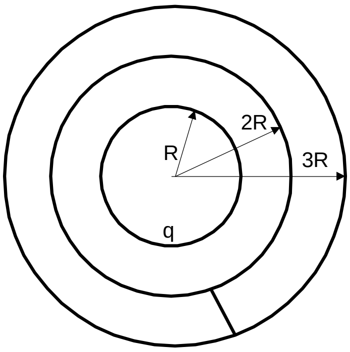
בכל נקודה בתוך המעטפת נוכל להגדיר מעטפת גאוסית, אשר המטען בתוכה הוא אפס. לכן גם השדה בכל נקודה בתוך הקליפה הינו אפס, ולכן הפוטנציאל קבוע. שוב, בחוץ פוטנציאל קבוע, ולכן הפרש הפוטנציאלים הוא אפס.

הסבר נוסף: נצייר את התפלגות המטען ונראה שהתפלגות המטען כפי שהיא נראית משתי הנקודות היא זהה, כלומר, מתאמי סימטריה נוכל לומר שהפוטנציאל בשתי הנקודות זהה, ולכן העבודה שיש להשקיע על מנת להעביר את המטען בין הנקודות היא אפס.

<u>שאלה</u>

נתונות שלוש קליפות כדוריות מוליכות קונצנטריות בעלות הרדיוסים R, 2R, 3R, הטעונות במטענים q, -2q, 3q בהתאמה. מחברים את הקליפה החיצונית 3R אל הקליפה במרחק 2R בחוט מוליך.
כמה מטען מצטבר על הקליפה ברדיוס 2R לאחר החיבור?

תשובה



כאשר אנו מחברים את הקליפה במרחק 2R עם הקליפה במרחק 3R אנו יכולים להתייחס אליהן כאל קליפה אחת. המטען q שעל הקליפה ברדיוס R מאלץ מטען q– על הקליפה במרחק 2R. כל שאר המטענים בורחים אל הקליפה השלישית, סה"כ מצטברים על הקליפה הנמצאת במרחק 3R – 2q מטענים.

שאלה

נגד בצורת קליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b עשוי מחומר בעל מוליכות סגולית σ_1 בתחום $a<r<\dfrac{a+b}{2}$ ומוליכות סגולית σ_2 עבור $\dfrac{a+b}{2}<r<b$.

א. חשב את התנגדות הנגד.

ב. מחברים את הנגד למקור מתח V. חשב את התנגדות הנגד בנקודה $r=b$.

תשובה א'

התנגדות נגד כדורי נתונה לנו על ידי: $R=\dfrac{1}{4\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ כאשר a הוא הרדיוס הפנימי שלו ו-b הוא הרדיוס הפנימי.

הנגדים למעשה מחוברים בטור, ולכן נתחיל בחישוב ההתנגדות של כל אחד מהם, ולאחר מכן הנגד השקול יהיה סכום ההתנגדויות.

$$R_1=\frac{1}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a+b}\right)$$

$$R_2=\frac{1}{4\pi\sigma_2}\left(\frac{2}{a+b}-\frac{1}{b}\right)$$

$$R=\frac{1}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a+b}\right)+\frac{1}{4\pi\sigma_2}\left(\frac{2}{a+b}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sigma_1 a}-\frac{2}{\sigma_1(a+b)}+\frac{2}{\sigma_2(a+b)}-\frac{1}{\sigma_2 b}\right)$$

תשובה ב'

נטען כי הזרם בחומר בעל המוליכות הסגולית σ_1 זהה לזרם הזורם בחומר בעל המוליכות הסגולית σ_2.

לפי חוק אום, $I=\dfrac{V}{R}$, כאשר V, R כבר נתונים לנו.

ידוע כי מוליכים המקיימים את חוק אום, מקיימים גם כי: $\vec{J}=\sigma\vec{E}$. כמו כן, $\vec{J}=I/A$

אנו מתעניינים בצפיפות הזרם בנקודה b. לכן: $\vec{J}(b)=\frac{I}{\left(4\pi b^2\right)}$. המוליכות הסגולית בנקודה זו היא σ_2

, ולכן:

$$\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma_2}=\frac{\frac{I}{\left(4\pi b^2\right)}}{\sigma_2}$$

תרגול 4

שאלה 1 (שיטת הדמויות)

נתונה מעטפת כדורית מוליכה ומוארקת ברדיוס R, שמרכזה בראשית הצירים. מטען נקודתי Q נמצא בנק' (a,0,0).
חשב את הפוטנציאל בכל המרחב $\varphi(x,y,z)$.

<u>תשובה</u>

נחלק את המרחב לשני חלקים: בתוך הכדור ומחוץ לכדור.

א. בתוך הקליפה:

המוליך חלול ואין מטענים בתוכו, ולכן $\vec{E}=0$. מכאן גם $\varphi=const$. על השפה מתקיים $\varphi(R)=0$ עקב ההארקה. מתקימת משוואת לפלס, כלומר $\vec{\nabla}^2\varphi=0$. הפיתרון של משוואת לפלס הינו פונקציה הרמונית. כידוע, לפונקציה הרמונית אין מקסימום או מינימום. לפיכך, ולפי משפט היחידות, הפוטנציאל בתוך הכדור הינו בהכרח 0.

ב. מחוץ לקליפה:

ננסה למצוא מטען נוסף q שייאפס את הפוטנציאל על הקליפה. (אנו מתעלמים כעת מהעובדה שהקליפה מוארקת. למעשה אנו כעת פותרים בעיה חדשה, ואנו פשוט מעוניינים במיקום בו הייתה הקליפה בבעיה המקורית יהיה אותו הפוטנציאל).
נבחר למקם את q בתוך הקליפה כי אנו מתעניינים בשלב זה בפוטנציאל מחוץ לקליפה, ולא נרצה שהפוטנציאל יושפע מהמטען.
מטעמי סימטריה, על q להיות על ציר x. נסמן את המרחק של q מראשית ציר x ב-b.

הפוטנציאל בכל נקודה במרחב:

$$(*)\ \varphi(x,y,z)=\frac{Q}{\sqrt{(a-x)^2+y^2+z^2}}-\frac{q}{\sqrt{(b-x)^2+y^2+z^2}}$$

על הקליפה מתקיימת המשוואה: $R^2=x^2+y^2+z^2$.

הפוטנציאל על הקליפה:

$$\varphi(\text{על הקליפה})=\frac{Q}{\sqrt{R^2-2ax+a^2}}-\frac{q}{\sqrt{R^2-2bx+b^2}}$$

נרצה: $\varphi(\text{על הקליפה})=0$. נחפש b, q שייקיימו זאת:

פתרון 1:

$q=Q, b=a$.
מטען הדמות נמצא באותו מקום כמו המטען האמיתי.
זהו פתרון לא פיסיקלי, מכיוון שמטען הדמות מייצג את המטענים המפוזרים על הכדור.

פתרון 2:

$$Q^2(R^2-2bx+b^2)=q^2(R^2-2ax+a^2)$$
$$Q^2(R^2+b^2)-2bQ^2x=q^2(R^2+a^2)-2aq^2x$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{cases}(1) & Q^2(R^2+b^2)=q^2(R^2+a^2)\\ (2) & bQ^2=aq^2\end{cases}$$

$$(2)\Rightarrow(3):\frac{b}{a}=\frac{q^2}{Q^2}$$
$$(1),(3)\Rightarrow R^2+b^2=\frac{b}{a}\left(a^2+R^2\right)$$
$$\Rightarrow b(b-a)=\frac{R^2}{a}(b-a)\Rightarrow b=\frac{R^2}{a}$$
$$q=-\frac{R}{a}Q$$

כעת כל שנותר הוא להציב את הפיתוחים במשוואת הפוטנציאל (*) ולקבל את התשובה.

הערה חשובה: מוליך מוארק הוא מסכך. נניח כי המטען Q היה ממוקם בתוך הקליפה הכדורית, אזי הבעייה הייתה פשוטה. הפוטנציאל מחוץ למוליך המוארק היה אפס, וכן גם השדה.

<u>שאלה 2 (קבל גלילי)</u>

נתון גליל אינסופי מוליך ברדיוס a, הטעון בצפיפות מטען אחידה ליחידת אורך λ. מקיפים את הגליל בקליפה גלילית מוליכה ומוארקת בעלת רדיוס b.

1. חשב את השדה בתחום $a<r<b$
2. חשב את הפרש הפוטנציאל בין הקליפה לגליל.
3. חשב את הקיבול ליחידת אורך של מערכת זו.

<u>תשובה</u>

1. השדה בתחום זה קיים לפי חוק גאוס: $2\pi rLE(r)=4\pi\lambda L$, ומכאן $\vec{E}(r)=\frac{2\lambda}{r}\hat{r}$.

   שדה זה זהה לשדה של תייל אינסופי!

   ($2\pi rL$ זהו שטח מעטפת הגליל. כאשר אנו מתרחקים מרחק קטן מהגליל הפנימי, אנו יכולים להתייחס אליו כאל תייל אינסופי, ולכן כשאנו באים לחשב את המטען עליו, אנו מחשבים את המטען ליחידת אורך).
2. הפרש הפוטנציאל בין הקליפה לגליל הפנימי:
$$V_{ab}=-\int_b^a E(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-\int_b^a\frac{2\lambda}{r}dr=-2\lambda\ln(r)\Big|_b^a=2\lambda\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
3. המטען על חלק באורך L מהקבל הינו:
$$Q=\lambda L=V_{ab}\cdot C\Rightarrow C=\frac{Q}{V_{ab}}\Rightarrow\frac{C}{L}=\frac{1}{2\ln\left(b/a\right)}$$

שאלה 3 (זרם)

כדור מוליך שרדיוסו a טעון ב t=0 במטען Q_0. הכדור נמצא בתוך חומר בעל מוליכות סגולית σ.

1. חשב את המטען כפונ' של הזמן והזרם החשמלי כפונ' של הזמן.
2. המערכת שקולה למעגל RC מצא את הקיבול וההתנגדות המתאימים.
3. מצא את האנרגיה שהפכה לחום ע"י אינטגרציה על ההספק.

תשובה

1. השדה החשמלי ברדיוס $r > a$ הינו: $\vec{E} = \frac{Q(t)}{r^2}\hat{r}$ כאשר $Q(t)$ הוא המטען הכלול על הכדור המוליך כתלות בזמן.

הזרם החשמלי היוצא מהכדור: $I = -\frac{dQ(t)}{dt}$. נשתמש בחוק אום, האומר כי $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. כמו כן, מתקיים כי $I = \int\limits_{\text{קליפה כדורית}} \vec{J}d\vec{a}$.

$I(t) = \int \sigma \frac{Q(t)}{r^2}\hat{r} \cdot \left(r^2 \sin\theta d\theta d\varphi\right)\hat{r} = 4\pi\sigma Q(t)$.

קיבלנו: $4\pi\sigma Q(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \Leftarrow 4\pi\sigma dt = -\frac{dQ(t)}{Q} \Leftarrow -4\pi\sigma t + c = \ln Q$,

ומכאן שהמטען הינו: $Q = \underbrace{e^c}_{const} e^{-4\pi\sigma t}$. אנו יכולים לבטל את הקבוע בעזרת תנאי ההתחלה האומר כי $Q = Q_0$.

נסכם את התוצאה:

$$\boxed{\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 e^{-4\pi\sigma t} \\ I(t) &= Q_0 4\pi\sigma e^{-4\pi\sigma t} \end{aligned}}$$

2. הכדור הטעון הוא קבל הנפרק דרך החומר המוליך שמסביבו המשמש כנגד. הקיבול של הכדור הינו $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{a}} = a$. (נשים לב שהיחידות של קיבול הינן יחידות אורך).

ההתנגדות הינה $R = \frac{L}{A\sigma}$. נחלק את החומר המוליך לקליפות שעוביין dr ושטחן $4\pi r^2$. נחשב את ההתנגדות:

$$R = \int\limits_a^\infty \frac{dr}{4\pi r^2\sigma} = \frac{1}{4\pi\sigma}\int\limits_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

מעגל RC: $Q = Q_0 e^{-t/RC}$. במקרה שלנו: $RC = \frac{1}{4\pi\sigma} \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-4\pi\sigma t}$

3. ההספק: $\frac{dW}{dt} \cdot I^2 R = Q_0^2 \left(4\pi\sigma\right)^2 e^{-8\pi\sigma t} \cdot \frac{1}{4\pi\sigma a}$.

האנרגיה הינה: $W = \int\limits_0^\infty \frac{dW}{dt}dt = Q_0^2 \frac{4\pi\sigma}{a}\int\limits_0^\infty e^{-8\pi\sigma t}dt = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{a}$.

האנרגיה שהפכה לחום שווה לאנרגיה האלקטרוסטטית ההתחלתית של המערכת, והיא $\frac{Q_0{}^2}{2a}$.

הרצאה 12 – שדות וכוחות הקשורים במטענים נעים, יחסות פרטית

שדות וכוחות הקשורים במטענים נעים

עד כה ראינו:

א. תופעות הנובעות ממטענים נחים - אלקטרוסטטיקה:
הגדרנו את השדה החשמלי: $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$.

ב. זרמים - מטען נע.
הגדרנו את צפיפות הזרם: $\vec{J}=nq\vec{u}$.

כעת נתעניין בשדות וכוחות הקשורים במטענים נעים.
התגלה כי ממטענים נעים, בנוסף לשדה החשמלי המתקבל ממטענים, מתקבל גם שדה מגנטי.
בהמשך הקורס נראה את **חוק לורנץ**, האומר כי הכוח הפועל על מטען q הינו:

$$\vec{F}=q\cdot\left(\vec{E}+\frac{1}{c}(\vec{V}\times\vec{B})\right)$$

עקרון חשוב נוסף שנראה, הוא שמטען חשמלי הוא אינווריאנטי ביחס לטרנספורמצית לורנץ (בלתי תלוי במערכת הייחוס).

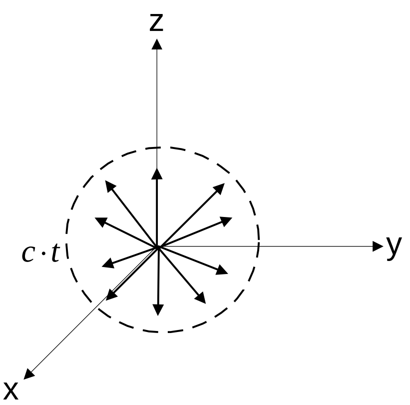
חזרה על יסודות תורת היחסות (הפרטית)

תורת היחסות הפרטית עוסקת במערכות לא מואצות.
התורה מבוססת על שני עקרונות יסודיים:

א. עיקרון היחסות: (בכל המערכות ל- $\vec{F}$ אותה צורה - כלומר הכוח הוא מהצורה $\vec{F}=q\cdot\left(\vec{E}+\frac{1}{c}(\vec{V}\times\vec{B})\right)$ בכל מערכת - אם כי ייתכן כי $\vec{E},\vec{B}$ יהיו שונים במערכות שונות).

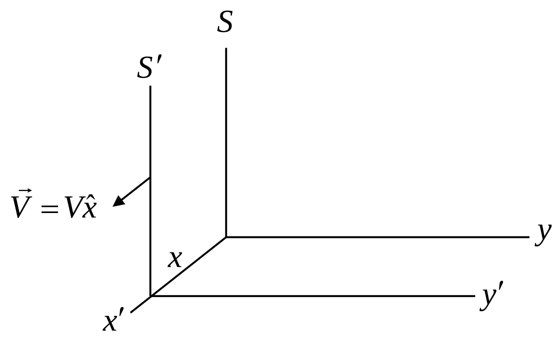
ב. קביעות מהירות האור: $c=3\cdot10^{10}\left[cm/\sec\right]$. מהירות זו זהה בכל מערכת ייחוס.

בעזרת תורת היחסות ניתן "לראות" תנועת אור.
דוגמא: פולס אור שנפלט ברגע $t=0$ ממקור בראשית מתקדם לפי: $x^2+y^2+z^2=\left(ct\right)^2$.
האור מתפשט ככדור אור שהרדיוס שלו הוא ct.



<u>הגדרה</u>

מאורע הוא ווקטור מקום-זמן.



$$S: \quad (x, y, z, t)$$
$$S': \quad (x', y', z', t')$$

לצורך הנוחיות שלנו אנו בוחרים מערכות שנעות אחת ביחס לשניה לאורך ציר x, וכמו כן הן מתלכדות ברגע $t = 0$.

מערכת S' נעה ביחס למערכת S במהירות קבועה $\vec{V} = V\hat{x}$.
צופים במערכת S רואים את מערכת S' נעה במהירות $V\hat{x}$. צופים במערכת S' רואים את מערכת S נעה במהירות $-V\hat{x}$.

<u>סימונים</u>

$$\boxed{\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}}$$

<u>טרנספורמצית לורנץ למאורעות</u>

המאורע המאופיין ב- S על ידי הווקטור (x, y, z, t) מאופיין על ידי הווקטור (x', y', z', t') ב- S' .
שני ווקטורי מקום-זמן אלו קשורים על ידי על ידי טרנספורמצית לורנץ למאורעות:

$$\boxed{x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)}$$

<u>טרנספורמצית לורנץ ההפוכה</u>

$$\boxed{x=\gamma(x'+v't'), \qquad y=y', \qquad z=z', \qquad t=\gamma(t'+\frac{\beta}{c}x')}$$

<u>האינווריאנטה של ווקטור מקום זמן</u>

גל אור מתפשט בכל מערכות הייחוס באותה צורה, ומתקיים:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0}$$

<u>תוצאות</u>

א. התקצרות האורך בכיוון התנועה:

הגדרת **האורך** היא מדידת שני קצוות של גוף בעת ובעונה אחת על ידי אותו צופה.
נניח שנתון גוף הנע במהירות $V\hat{x}$.
נסמן: L_x - אורך המנוחה של גוף במערכת ביחס לציר x במערכת S. אם ימדדו את רכיב זה במערכת S' , אזי ערכו יהיה: $\boxed{L'_x=\frac{L_x}{\gamma}}$.

נסמן: L_y - אורך המנוחה של גוף במערכת ביחס לציר y במערכת S. אם ימדדו את רכיב זה במערכת S' , אזי ערכו יהיה: $L'_y=L_y$. אורכו של הגוף בכיוון ניצב לכיוון המהירות לא השתנה.

נשים לב שמכל מערכת ייחוס, הגוף הנע ייראה כמתכווץ.
לכאורה קשה מטרנספורמצית לורנץ של מאורעות לראות את תוצאה זו. מהטרנספורמציה נראה תחילה כי גוף יכול להתארך (למשל במעבר בין S' ל- S - טרנספורמציה הפוכה). הטעות בגישה זו, היא שטרנספורמצית לורנץ מוגדרת על נקודות במרחב. כדי למדוד את האורך עלינו למדוד <u>שתי נקודות</u> במערכת ולחשב את ההפרש ביניהם. כשאנו פועלים בצורה זו - תמיד תהיה התקצרות של האורך.

ב. התארכות הזמן (פיגור שעונים):

שעון נח במערכת S ימדוד $\Delta t=t_2-t_1$.
שעון הנע ביחד עם מערכת S' ימדוד $\boxed{\Delta t'=\gamma\Delta t}$.
(הצופה במערכת S' מודד את השעון שנמצא במערכת S).

ג. שני מאורעות סימולטניים ב- S אינם סימולטניים ב- S' .

דוגמא: נתונים שני מאורעות $\left(x_1,y_1,z_1,t_1\right),\left(x_2,y_2,z_2,t_2\right)$ במערכת S, כך שמתקיים $t_1=t_2$ (כלומר המאורעות מתרחשים באותו הזמן).
לפי טרנספורמצית לורנץ, ב- S' המאורעות האלו יהיו $\left(x'_1,y'_1,z'_1,t'_1\right),\left(x'_2,y'_2,z'_2,t'_2\right)$ כאשר $t'_1\neq t'_2$.
צופה ב- S' לא יראה את שני המאורעות מתרחשים בו זמנית.

<u>טרנספורמצית לורנץ לשינויים אינפיטיסימלים</u>

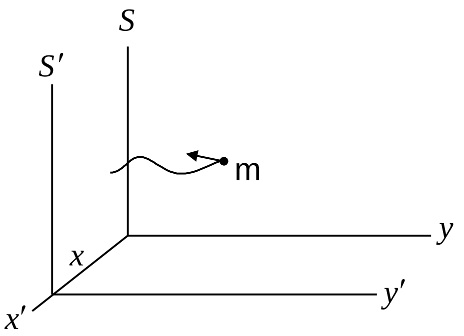
טרנספורמצית לורנץ קיימת גם לשינויים אינפיטיסימלים בקורדינטות של מאורעות:

נשתמש בעובדה זו כדי למצוא טרנספורמציות בין וקטורים שהם למעשה נגזרות (למשל - מהירות).

$$\boxed{\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - \beta c dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx) \end{aligned}}$$

<u>תנועה של חלקיק בעל מסה m</u>

כאשר אנו מדברים על **מסה** של חלקיק של חלקיק, אנו מתכוונים אל המסה של החלקיק במערכת בה נמצא החלקיק במנוחה.
אנו רוצים למצוא את הקשר בין שתי מערכות הייחוס, כאשר אנו מסתכלים על תנועת חלקיק באחת מהמערכות.



אנו דנים בתנועת חלקיק בהשפעת כוח.

במערכת S: כוח $\vec{F}(\vec{r},t)$, מהירות $\vec{v}(t)=\left(v_x,v_y,v_z\right)$.
במערכת S' : כוח $\vec{F}'(\vec{r}',t')$, מהירות $\vec{v}'(t)=\left(v'_x,v'_y,v'_z\right)$.

נמצא את הקשר בין המהירויות בשתי המערכות.
טרנספורמצית המהירויות:

$$\boxed{\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - \beta c}{1-\frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1-\frac{V\cdot v_x}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt-\frac{\beta}{c}dx\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{V\cdot v_x}{c^2}\right)} \end{aligned}}$$

קיבלנו שהטרנספורמציה של המהירות היא טרנספורמציה לא ליניארית (כי v'_y תלויה ב- v_x).
מכאן לא נוכל להשתמש בטרנספורמציה לפתרון בעיות. לכן, אנו משתמשים בתנע ואנרגיה על מנת לעבור לקשר ליניארי בין המערכות.

<u>טרנספורמציות המהירויות ההפוכה</u>

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1+\frac{V\cdot v'_x}{c^2}} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\gamma\left(1+\frac{V\cdot v_x}{c^2}\right)} \end{aligned}}$$

<u>תנע ואנרגיה יחסותיים</u>

במערכת S:
חלקיק נע במהירות $\vec{v}$. חלק ממאפייני החלקיק בתורת היחסות הם $\beta(v),\gamma(v)$, המושפעים מגודל מהירות החלקיק בלבד (ולא מכיוונו). כאשר נתון לנו חלקיק ביחסות, נשאל מהם ה- $\beta(v),\gamma(v)$ שלו, ובעזרתם נוכל לנתח דברים הקשורים אל החלקיק.

$$v=\sqrt{v_x^{\,2}+v_y^{\,2}+v_z^{\,2}},\qquad \beta(v)=\frac{v}{c},\qquad \gamma(v)=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

הגדרות

נגדיר את **התנע היחסותי**: $\vec{P}=\gamma(v)m\vec{v}$. התנע משתנה מרגע לרגע כי $\vec{v}$ משתנה.
נגדיר את **האנרגיה היחסותית**: $U=\gamma(v)mc^2$.
הגדלים $U,\vec{P}$ תלויים במהירות הרגעית במערכת S.

וקטור תנע-אנרגיה

וקטור תנע-אנרגיה במערכת S יוגדר כך: $\left(P_x,P_y,P_z,\frac{U}{c^2}\right)$.
במערכת S' מתקיים:

$$\boxed{v'=\sqrt{v_x'^2+v_y'^2+v_z'^2},\qquad \beta(v')=\frac{v'}{c},\qquad \gamma(v')=\frac{1}{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^{1/2}}}$$

עבור S' , נגדיר את **התנע היחסותי**: $\vec{P}'=\gamma(v')m\vec{v}'$ ואת **האנרגיה היחסותית**: $U'=\gamma(v')mc^2$.
נקבל את **וקטור התנע-אנרגיה** במערכת S' : $\left(P_x',P_y',P_z',\frac{U'}{c^2}\right)$.

טרנספורמצית לורנץ לווקטור תנע-אנרגיה

נמצא את הקשר בין ווקטור התנע-אנרגיה במערכת S לאותו ווקטור במערכת S' .

$$\boxed{P_x'=\gamma\cdot\left(P_x-\frac{\beta}{c}V\right)\qquad P_y'=P_y\qquad P_z'=P_z\qquad U'=\gamma\cdot\left(U-\beta cP_x\right)}$$

γ,β הם מספרים קבועים שמוגדרים על ידי המהירות היחסית בין שתי המערכות, ואין להם קשר ל- $\beta(v),\gamma(v)$ המוגדרים לפי המהירות הרגעית של החלקיק.

האינווריאנטה של תנע-אנרגיה

$$U^2-c^2P^2=U'^2-c^2P'^2=(mc^2)^2$$

חוקי השימור המתקבלים

$$\sum_i U_i=\sum_j U_j'=const$$

$$\sum_i \vec{P}_i=\sum_j \vec{P}_j'=const$$

כלומר: האנרגיה הכללית נשמרת, וכן האנרגיה היחסותית נשמרת.
נשים לב כי בתורת היחסות, תרומת האנרגיה של חלקיק נח היא mc^2 , וזאת לעומת מכניקה ניוטונית שתרומת האנרגיה של חלקיק נח הינה אפס.

<u>נגדיר כוח על ידי הקבלה למכניקה ניוטונית</u>

$$(*)\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}}=\frac{d}{dt}(\underbrace{m}_{\substack{\text{assuming}\\ \text{m is const}}}\vec{v})=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$$

ניקח את (*) ונגדיר כוח במערכת יחסותית: $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$

נמצא כעת טרנספורמציה של $\frac{d\vec{P}}{dt}$ ביחס למערכת המנוחה של החלקיק.
החלקיק נע בהשפעה של כוח, ולכן מערכת המנוחה שלו איננה מערכת אינרציאלית.
אנו נניח כי המערכת אינרציאלית (כמעט) על די כך שנניח כי ביחס למערכת שלנו תנועת החלקיק היא מאוד איטית. קירוב זה טוב רק לפרק זמן קצר.
נגדיר את S' ("כמעט מערכת המנוחה של החלקיק") - כמערכת שבה $V'\to 0$ בפרק הזמן $\Delta t'$ (מספיק ארוך).
ב- S' תנועת החלקיק היא ניוטונית. נוכל בעזרת הנחה זו לתאר את תנועת החלקיק באמצעות המשוואות של המכניקה הניוטונית.

לפי מכניקה ניוטונית:

<u>במערכת</u> S' :

$$\vec{F}'=\left(F'_x,F'_y\right)$$

$$F'_x=\frac{dP'_x}{dt'}$$

$$\Delta P'_x=F'_x\cdot\Delta t'$$

$$\Rightarrow \Delta x'=\frac{1}{2}\cdot\frac{F'_x}{m}\cdot\Delta t'^2$$

השינוי באנרגיה יהיה:

$$\Delta U'=\frac{1}{2}m\left(\Delta v'\right)^2=\frac{1}{2}\left(\Delta P'_x\right)^2$$

<u>נעבור למערכת S:</u>

$$\frac{dP_x}{dt}=\frac{\gamma\left(dP'_x+\frac{\beta}{c}dU'\right)}{\gamma\left(dt'+\frac{\beta}{c}dx'\right)}=\frac{\frac{dP'_x}{dt'}+\frac{\beta}{c}\frac{dU'}{dt'}}{1+\frac{\beta}{c}\frac{dx'}{dt'}}$$

נשים לב כי כל הגדלים שהם בעצמם נגזרות הם גדלים שחישבנו בעזרת מכניקה ניוטונית.
נציב ונקבל:

$$\frac{dP_x}{dt}=\frac{\frac{dP_x'}{dt'}+\frac{\beta}{c}\frac{1}{2m}\cdot\frac{\left(F_x'dt'\right)^2}{dt'}}{1+\frac{\beta}{c}\frac{1}{2m}\cdot F_x'\cdot dt'}$$

כאשר F_x' הוא קבוע בפרק הזמן הקצר, ואילו dt' הוא גודל אינפיסיטימלי השואף לאפס.

מכאן נקבל:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dP_x}{dt}=\frac{dP_x'}{dt'}\\ \\ F_x=F_x'\end{gathered}}$$

מסקנה: רכיב הכוח בכיוון התנועה היחסותית העובד על חלקיק שכמעט נמצא במנוחה עובר ללא שינוי למערכת היחסותית הנעה במצהירות יחסית בין 0 ל-c ביחס למערכת שלנו.

רכיב הכוח בכיוון ניצב לתנועה היחסית:

$$\frac{dP_y}{dt}=\frac{dP_y'}{\gamma\left(dt'+\frac{\beta}{c}dx'\right)}=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\frac{dP_y'}{dt'}}{1+\frac{\beta}{c}\cdot\underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{0\text{ when }dt'\to 0}}$$

ומכאן:

$$\boxed{F_y=\frac{dP_y}{dt}=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dP_y'}{dt}=\frac{1}{\gamma}F_y'}$$

קיבלנו שרכיב הכוח הניצב הפועל על חלקיק כאשר הוא כמעט במנוחה קטן פי γ במעבר למערכת היחסותית.

זהו מקרה פרטי של טרנספורמצית הכוח הכללית.

הרצאה 13 – שדות וכוחות הקשורים במטענים נעים (המשך)

שדות וכוחות הקשורים במטענים נעים

יהי חלקיק בעל מסה m ומטען q.

הגדרנו:

מהירות החלקיק:	$\vec{v}=\left(v_x,v_y,v_z\right)$
תנע יחסותי:	$\vec{P}'=\gamma(v')m\vec{v}'$
אנרגיה יחסותית:	$U'=\gamma(v')mc^2$
מסה יחסותית:	$m(v)=\gamma(v)\cdot m$
השינוי באנרגיה:	$\Delta U=\Delta m(r)\cdot c^2$

אינווריאנטים

מסת הגוף איננה אינווריאנטית לטרנספורמצית לורנץ. $m(v)=\gamma(v)\cdot m$. הגוף נעשה כבד יותר כפונקציה של מהירותו.

המטען החשמלי הוא אינווריאנטי ביחס לטרנספורמצית לורנץ.

שלושה שלבים בניתוח הכוחות והשדות הקשורים במטענים נעים

אנו מפרידים את הלמידה לשלושה לשבים מטעמים דידקטיים.

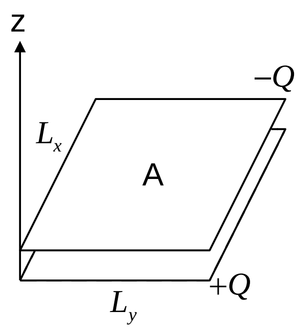
א. מטען הבוחן נח ומקורות השדה נעים - $\vec{v}_0\neq 0, q_{0,} \vec{v}=0, q$.
ב. מקורות השדה נחים ומטען הבוחן נע - $\vec{v}_0=0, q_{0,} \vec{v}\neq 0, q$.
ג. מטען הבוחן ומקורות השדה נעים.

א. מטען הבוחן נח, מקורות השדה נעים

מקרה פרטי 1:

מערכת S:

שתי טבלאות אינסופיות בעלות שטח A, מרחק d, טעונות ב- $+Q$ וב- $-Q$. מתקיים: $\sqrt{A}\gg d$.



השדה בין הלוחות הינו שדה אחיד בכיוון $\hat{z}$, והוא:

$$\vec{E}=E_z\hat{z}=4\pi\sigma\hat{z}=4\pi\frac{Q}{A}=4\pi\frac{Q}{L_x\cdot L_y}$$

נעבור כעת למערכת S' , בה הקבל נע במהירות $\vec{V}=V\hat{x}$.

במערכת S':

נסמן $\gamma = \frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ ואז יתקיים כי:

$$Q' = Q$$

$$L'_x = \frac{L_x}{\gamma}$$

$$A' = L'_x \cdot L'_y = \frac{L_x L_y}{\gamma} = \frac{A}{\gamma}$$

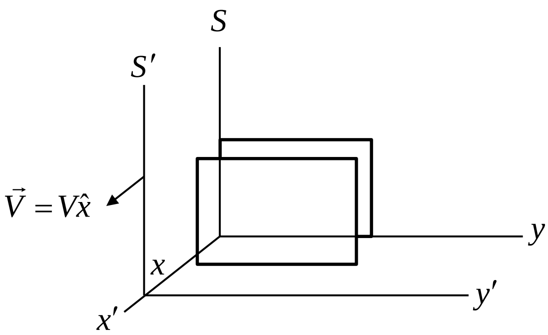
נחשב את השדה:

$$E'_z = 4\pi \frac{Q}{A'} = 4\pi \frac{Q}{A} \cdot \gamma = \gamma \cdot E_z$$

השדה בכיוון ניצב לתנועה גדל פי γ.

מקרה פרטי 2:

ניקח משטח הניצב לכיוון התנועה. נבדוק את $\vec{E}$ בכיוון התנועה.



הלוחות נעים בכיוון מקביל לתנועה.
השדה הוא בלתי תלוי במרחק בין הטבלות ומכאן שבמצב זה השדה לא ישתנה.

במערכת S: $E_x = 4\pi \frac{Q}{A}$ $\qquad A = L_y L_z$

במערכת S': $E'_x = 4\pi \frac{Q'}{A'}$ $\qquad A' = L'_y L'_z$

כאשר מתקיים:

$$Q = Q' \qquad A = A' \Leftarrow E'_x = E_x$$

השדה לא השתנה מכיוון שצפיפות המטען לא השתנתה.

באופן כללי:

ב-S מקורות השדה (המטענים) במנוחה.
ב-S' נמדד שדה של מקורות נעים - E'.
נחלק את השדה לשני רכיבים: רכיב ניצב לכיוון התנועה (מישור yz) ורכיב בכיוון המקביל לציר x.

$$\vec{E} = \left(E_\parallel, E_\perp\right) : S \qquad\qquad \vec{E}' = \left(E'_\parallel, E'_\perp\right) : S'$$

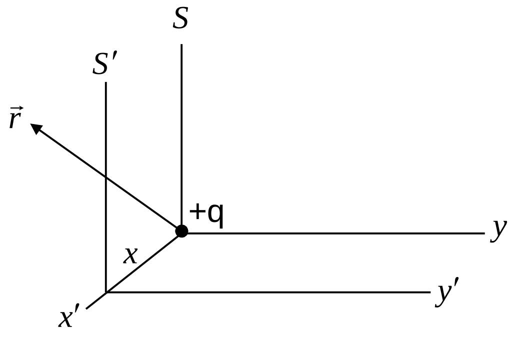
טרנספורמצית שדות: $\boxed{E'_\perp = \gamma E_\perp \qquad E'_\parallel = E_\parallel}$

זוהי טרנספורמציה של שדה חשמלי שמקורותיו נעים, הנמדד על ידי מטען בוחן נח.

<u>דוגמא</u>

חישוב השדה הנוצר על ידי מטען נקודתי +q הנע במהירות קבועה.

מערכת S: המטען +q (מקור השדה) נח בראשית.



נניח (מטעמי נוחות) שתנועת החלקיק היא על מישור xz.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{r^2}\hat{r}$$
$$\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$$

נפרק את $\vec{E}$ לרכיבים על מנת לבצע את הטרנספורמציה:

$$E_x(\vec{r},t) = \frac{qx}{r^3} = \frac{qx}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad E_z(\vec{r},t) = \frac{qz}{r^3} = \frac{qz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

הערה: לשים לב לפירוק של $\vec{E}$ לרכיבים. אולי זה טריויאלי למי שלומד חשמל-פיסיקה (פסיכים). אני בחיים לא הייתי עולה על זה לבד.

S' היא מערכת בה המטען +q נע במהירות V לאורך ציר x. S' נעה במהירות $-V\hat{x}$.
נבחר: $t = t' = 0$, הזמן שבו +q עובר בראשית של S' . מקומו של +q ב- S' הינו: $r'_q = Vt'\hat{x}$.

ניזכר בטרנספורמצית לורנץ למאורעות:

$$S: \quad \left(x,y,z,t\right)$$
$$S': \quad \left(x',y',z',t'\right)$$
$$x' = \gamma(x-\beta ct) = \gamma(x-vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma(t-\frac{\beta}{c}x)$$

מקרה פרטי: ברגע $t' = 0$:

$$E'_x = \frac{qx}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{q\gamma x'}{\left(\left(\gamma x'\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{q\gamma z'}{\left(\left(\gamma x'\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}$$

במקרה כללי, ברגע t' כלשהו:

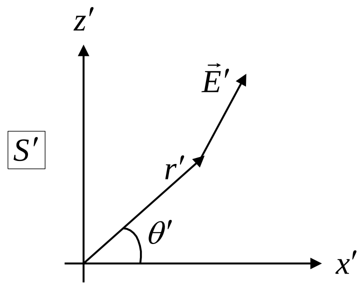
$$\boxed{\begin{aligned}E'_x\left(\vec{r}',t'\right)&=\frac{q\gamma\left(x'-\beta ct'\right)}{\left(\gamma^2\left(x'-\beta ct'\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}=\frac{q\gamma\left(x'-Vt'\right)}{\left(\gamma^2\left(x'-Vt'\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}\\E'_z\left(\vec{r}',t'\right)&=\frac{q\gamma z'}{\left(\gamma^2\left(x'-\beta ct'\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}=\frac{q\gamma z'}{\left(\gamma^2\left(x'-Vt'\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}\end{aligned}}$$

הביטוי $\beta ct'$ זהו למעשה $V\cdot t'$, שזהו "העתק" החלקיק.

השדה $\vec{E}$ במערכת S הוא רדיאלי, ומתקיים: $\frac{E_x}{E_z}=\frac{x}{z}$.

עבור השדה $\vec{E}'$ במערכת S' מתקיים: $\frac{E'_x}{E'_z}=\frac{x'-\beta ct'}{z'}=\frac{x'-V\cdot t'}{z'}$.

<u>הערה חשובה:</u> $\vec{E}'$ הוא שדה רדיאלי אל מקום המצאו של q ברגע t'.



גודלו של השדה במערכת S' : $\left|E'\left(\vec{r}',t'\right)\right|$

נחשב ברגע $t=0$:

$$\left|E'\left(\vec{r}',t'=0\right)\right|^2=E'_x\left(\vec{r}',t'=0\right)^2+E'_z\left(\vec{r}',t'=0\right)^2=\frac{q^2\gamma^2\left(x'^2+z'^2\right)}{\left(\left(\gamma x'\right)^2+z'^2\right)^3}$$

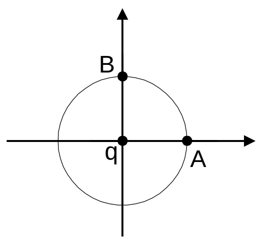
ידוע כי $x'^2+z'^2=r'^2$, ולכן:

$$\left|E'\left(\vec{r}',t'=0\right)\right|^2=\frac{q^2\gamma^2r'^2}{\gamma^6r'^6\left(1-\beta\frac{z'^2}{r'^2}\right)^3}=\frac{q^2}{\gamma^4r'^4\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^3}$$

ומכאן שגודלו של השדה $\left|E'\left(\vec{r}',t'\right)\right|$ הינו:

$$\boxed{E'(r',\theta',t'=0)=\frac{q}{\gamma^2r'^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}=\frac{q}{r'^2}\cdot\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}}$$

גודל השדה תלוי בזווית θ' (ביחס למקום הימצאו של $+q$).



נחשב את השדה על ציר x' :

$$E'(r',\theta'=0,t'=0)=\frac{q}{\gamma^2 r'^2}$$

נחשב את השדה על ציר z' :

$$E'(r',\theta'=\frac{\pi}{2},t'=0)=\gamma\cdot\frac{q}{r'^2}$$

צופים הנמצאים בנקודה A או בנקודה B במערכת S' מודדים שדה שונה.
צופים ב- S' הנמצאים באותו מרחק r' ממקום הימצאו של q+ ימדדו:

$$\frac{E'(r',\theta'=\frac{\pi}{2},t'=0)}{E'(r',\theta'=0,t'=0)}=\gamma^3$$

השדה איננו ספרי!

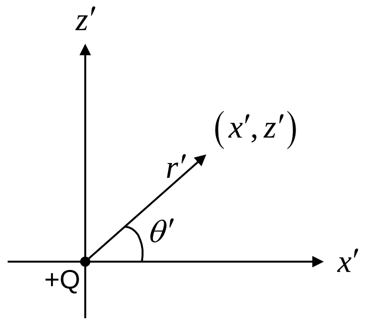
<u>הערה</u>

שדה חשמלי של מטען נקודתי נע איננו שדה משמר!

סיכום - השדה החשמלי של מטען נקודתי הנע במהירות קבועה

$$\boxed{E'=\frac{Q}{r'^2}\cdot\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}}$$

Q הוא מטען החלקיק הנע במהירות $V\hat{x}$. r' הוא המרחק מהמטען Q (כאשר מיקומו של Q עצמו נלקח כראשית) לבין הנקודה (x',z'). כמו כן, θ' הינה הזוית בין כיוון תנועתו של החלקיק לבין הרדיוס וקטור המחבר את מיקומו הרגעי למקום בו נמדד E' (ראה תרשים). E' הוא השדה הנמדד <u>במערכת המעבדה</u> בנקודה (x',z').

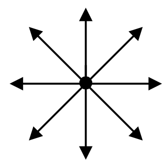


<u>הרצאה 14 - שדות וכוחות הקשורים במטענים נעים (המשך)</u>

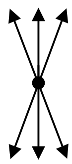
א' - מטען הבוחן נח ומקורות השדה נעים (המשך)

ב-S מקורות השדה (המטענים) במנוחה. ב- S' נמדד שדה של מקורות נעים - E' .
טרנספורמצית שדות: $E'_\perp = \gamma E_\perp$ $\qquad$ $E'_\parallel = E_\parallel$

הגענו לביטוי הבא: $\dfrac{E'(r',\theta'=\frac{\pi}{2},t'=0)}{E'(r',\theta'=0,t'=0)}=\gamma^3$ ובעקבותיו למסקנה כי השדה הוא אומנם רדיאלית יחסית למקום הימצאו הרגעי של החלקיק, אבל במערכת בה המטען נע, השדה איננו רדיאלי.
$\vec{E}'$ - עוצמתו של השדה של מטען נקודתי הנע במהירות קבועה תלויה בכיוון תנועתו - המרחב אינו אנאיזוטרופי).
באופן סימלי:



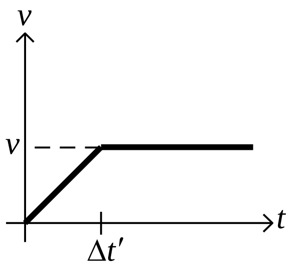
מטען נח



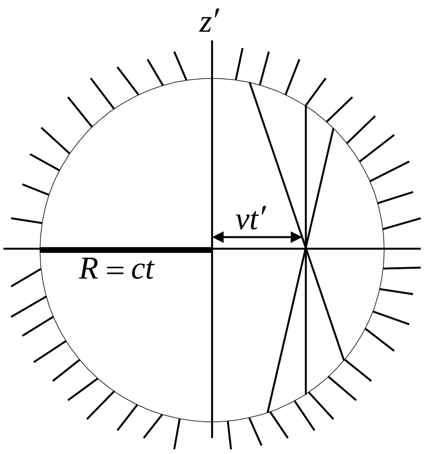
מטען נע

נרצה לראות מה קורה אם המטען מתחיל את תנועתו או מסיים אותה ברגע מסויים.

מקרה 1

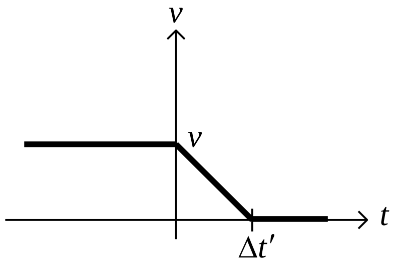


מטען נקודתי q+ נח בראשית עד רגע $t=0$. ברגע $t=0$ המטען מואץ. לאחר $\Delta t'$ החלקיק מפסיק להיות מואץ ומתחיל לנוע במהירות קבועה $\vec{v}$.



האינפורמציה שהחלקיק מתחיל לנוע מגיעה לכל הצופים. לכדור היוצא מהראשית, שרדיוסו $R=ct$ אנו קוראים **כדור האינפורמציה** או **כדור האור**.
בכל הנקודות בתוך הכדור המידע שהמטען התחיל לנוע הגיעה. בתוך הכדור - שדה אנאיזוטרופי.
מחוץ לכדור, עדיין מתקבל המידע מהראשית, כלומר לצופים מחוץ לכדור נראה כי המטען עדיין נמצא בראשית - שדה איזוטרופי. מחוץ לכדור יימדד שדה של מטען נח!

מקרה 2



מטען נקודתי q+ נע במהירות $\vec{v}' = v\hat{x}$ עד רגע $t' = 0$.
ברגע $t' = 0$ המטען מאט ועוצר בראשית, לאחר $\Delta t'$ זמן.

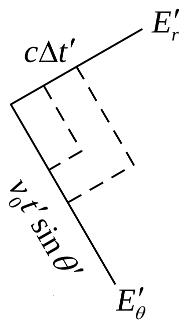
התפלגות $\vec{E}'$ במרחב ברגע $t' > \Delta t'$: האינפורמציה שהחלקיק נעצר מגיעה לכל הצופים.
בכל הנקודות בתוך הכדור האור נמדד שדה של מטען נח. מחוץ לכדור, עדיין קיים של שדה של מטען נע, שדה רדיאלי אל המקום שבו היה אמור להיות המטען אילו המשיך בתנועתו.

<u>חישוב השדה בקליפה של כדור האינפורמציה</u>

נציג כעת מודל מקורב לחישוב השדה $\vec{E}$ בקליפה של כדור האינפורמציה.
ניקח מטען $+q$ הנע במהירות קבועה עד $t = 0$. ברגע $t = 0$ הוא מתחיל להאט, עד שנעצר אחרי $\Delta t = \tau$. תאוטת המטען: a_0 . המהירות מהתחלת התאוטה עד לרגע העצירה נתונה על ידי $v_0 = a_0\tau$.

מרחק העצירה: $\Delta x = \frac{1}{2}a_0\tau^2 = \frac{1}{2}v_0\tau$.

ברגע $t \gg \tau$ רדיוס כדור האינפורמציה הינו $R = ct$. בקליפה שעוביה הוא $c\tau$ מתרחש השינוי בשדה $\vec{E}$.



נביט ברכיב השדה היוצא מהראשית אל הקליפה, ונחשב את הרכיב הניצב והמקביל לקליפה.

$$\frac{E_\theta'}{E_r'} = \frac{v_0 t' \sin\theta}{c \cdot \tau}$$

מכאן:
השדה הניצב:

$$E_\theta' = \underbrace{\frac{q}{\left(ct'\right)^2}}_{E_r'} \cdot \frac{v_0 t' \sin\theta}{c\tau} = \frac{qv_0 \sin\theta}{c^3 t' c\tau}$$

$$E_\theta' = \frac{q}{c^2 t'} \cdot \frac{a_0 \cdot \tau \sin\theta'}{c \cdot \tau} = \frac{q}{c^2 R} \cdot a_0 \sin\theta'$$

כאשר $ct' = R$.

הרכיב הרדיאלי של השדה משתנה לפי $\frac{1}{R^2}$, ואילו הרכיב שקיבלנו משתנה לפי $\frac{1}{R}$.

תרגול 5

שאלה 1

נתונה מערכת גלילים מוליכים בעלי אורך L ורדיוסים a,b,c כאשר מתקיים כי $a,b,c \ll L$.

התווך שבין b ו-c מלא בחומר בעל מוליכות סגוליות $\sigma = \sigma_0 \dfrac{b}{r}$ כאשר σ_0 קבוע, ו- $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$.

הגליל b טעון במטען q+ והגליל המרכזי a טעון במטען Q-.

ברגע $t=0$ מחברים את הגליל הפנימי והחיצוני באמצעות תייל מוליך.

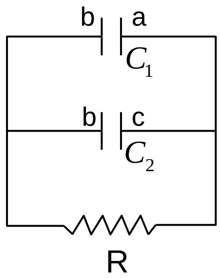
א. חשב את המטען על הגליל הפנימי כתלות בזמן.

ב. כמה חום נוצר בחומר המוליך (הנגד) במשך הזרימה של המטען?

<u>תשובה</u>

א.

המערכת הנתונה מהווה שני קבלים המחוברים במקביל, בנוסף לנגד המחובר לשניהם במקביל.



הקבל C_1 הינו הקבל הגלילי בין ab ולכן $C_1 = \dfrac{L}{2\ln(b/a)}$.

הקבל C_2 הוא הקבל בין bc ולכן $C_2 = \dfrac{L}{2\ln(c/b)}$.

נחשב את הערך של R, שהוא ההתנגדות בין הגליל c אל הגליל b:

$$R = \int_a^c \frac{dr}{2\pi r L \sigma(r)} = \int_b^c \frac{r dr}{2\pi\sigma_0 b L r} = \frac{c-b}{2\pi\sigma_0 b L}$$

קבוע הזמן של פריקת המטען על שני הקבלים הוא $\tau = RC$ כאשר C הוא הקיבול השקול של שני הקבלים.

$$C = C_1 + C_2 = \frac{L}{2\ln(b/a)\ln(c/b)}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) = \frac{L\ln(c/a)}{2\ln(b/a)\ln(c/b)}$$

ולכן:

$$\tau = RC = \frac{(c-b)\ln(c/a)}{4\pi\sigma_0 b\ln(b/a)\ln(c/b)}$$

תלות המטען הכולל על שני הקבלים כפונקציה של הזמן היא:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) = Q\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

מטען זה הוא סכום המטענים שעל שני הקבלים: $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$.

המתח על שני הקבלים זהה:

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} = \frac{Q_2(t)}{C_2} \Rightarrow Q_1(t) = \frac{C_1}{C_2}Q_2(t) \Rightarrow Q_1(t) = \frac{C_1}{C_2}\left(Q(t) - Q_1(t)\right) \Rightarrow$$

$$Q_1(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}Q(t) = \frac{\ln(c/b)}{\ln(c/a)}Q\cdot\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$.

ב.
החום שנוצר (רק בנגד) הוא בעצם כל האנרגיה שהייתה במערכת ברגע שאחרי חיבור החוט, כי הקבלים נפרקים, ולכן:

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{Q^2}{L}\cdot\frac{\ln(b/a)\ln(c/b)}{\ln(c/a)}$$

דרך נוספת לפתור את הבעיה:

$$W=\int_0^\infty RI^2dt=R\int_0^\infty\left(\frac{dQ(t)}{dt}\right)^2dt=R\int_0^\infty\frac{Q^2}{\left(RC\right)^2}\cdot e^{-2t/RC}dt=\frac{Q^2R}{\left(RC\right)^2}\cdot\frac{RC}{2}=\frac{Q^2}{2C}$$

הערה כללית:
נשים לב שכאשר אנו לוקחים שני רכיבים ומחברים אתם, החיבור תמיד יעשה במקביל, מכיוון שבכל מקרה, המתח על שניהם יהיה זהה.

שאלה מתרגול 8 - סמסטר אביב תשס"ב

מטען נקודתי q+ נע במערכת המעבדה במהירות $\vec{v}=v\hat{x}$. ברגע $t=0$ חולף המטען דרך ראשית הצירים.

<u>שאלות:</u>

א. מהו השדה החשמלי במערכת המעבדה בנקודות $\vec{r}_1=-a\hat{x}$ ו- $\vec{r}_2=a\hat{y}$ בכל רגע t?
ב. מהו השדה החשמלי במערכת המנוחה של המטען בנקודות $\vec{r}_1=-a\hat{x}$ ו- $\vec{r}_2=a\hat{y}$ בכל רגע?
ג. מהו הכוח שמפעיל המטען q+ על מטען q- שנמצא במנוחה במערכת המעבדה בנקודה $\vec{r}=-a\hat{x}$? חשבו זאת במערכת המעבדה ובמערכת המנוחה של q+.

<u>פתרון:</u>

תשובה א'

השדה בנקודה כללית $r=x\hat{x}+y\hat{y}$ הוא:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\gamma q\left[(x-\beta ct)\hat{x}+y\hat{y}\right]}{\left[\gamma^2(x-\beta ct)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

כאשר $\gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$ $\beta=\frac{v}{c}$.

ולכן השדה ב- $\vec{r}_1=-a\hat{x}$ הינו $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\gamma q\left[(-a-\beta ct)\hat{x}\right]}{\left[\gamma^2(-a-\beta ct)^2\right]^{3/2}}=\frac{-q\hat{x}}{\gamma^2(a+\beta ct)^2}$.

בנקודה $\vec{r}_2=a\hat{y}$ נקבל: $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\gamma q\left[-\beta ct\hat{x}+a\hat{y}\right]}{\left[\gamma^2\beta^2c^2t^2+a^2\right]^{3/2}}$

תשובה ב'

נציג שתי שיטות לפיתרון.

שיטה 1:

שימוש בטרנספורמציה $t=\gamma\left(t'+\frac{\beta x'}{c}\right)$ $x=\gamma(x'+\beta ct'),$.

במערכת המנוחה של החלקיק מתקיים כי: $\vec{E}'(\vec{r},t')=\frac{q\vec{r}'}{r'^3}$.

נמצא את $\vec{r}_1'$ במערכת S' המתאים ל $\vec{r}_1$ במערכת המעבדה.

$$\vec{r}_1=-a\hat{x}+0\hat{y}\Rightarrow -a=\gamma\left(x'+\beta ct'\right),\qquad x'=-\frac{a}{\gamma}-\beta ct',\qquad y'=0\Rightarrow$$

$$\vec{r}_1'=\left(-\frac{a}{\gamma}-\beta ct'\right)\hat{x}'$$

ומכאן:

$$\vec{E}'\left(\vec{r}_1',t'\right)=\frac{-q\hat{x}'}{\left(\frac{a}{\gamma}+\beta ct'\right)^2}$$

נמצא את $\vec{r}_2'$ במערכת S' המתאים ל $\vec{r}_2$ במערכת המעבדה:

$$\vec{r}_2=0\hat{x}+a\hat{y}\Rightarrow 0=\gamma\left(x'+\beta ct'\right)\Rightarrow x'=-\beta ct',\qquad y'=a\Rightarrow$$
$$\vec{r}_2'=-\beta ct'\hat{x}'+a\hat{y}'$$

ומכאן:

$$\vec{E}'\left(\vec{r}_2',t'\right)=\frac{q\left(-\beta ct'\hat{x}'+a\hat{y}'\right)}{\left[\left(\beta ct'\right)^2+a^2\right]^{3/2}}$$

שיטה 2:

שימוש בטרנספורמציה $t'=\gamma\left(t-\frac{\beta x}{c}\right),\qquad x'=\gamma(x-\beta ct)$.

נמצא את $\vec{r}_1'$:

$$\vec{r}_1=-a\hat{x}+0\hat{y}\Rightarrow x'=\gamma\left(-a-\beta ct\right),\qquad t'=\gamma\left(t+\frac{\beta a}{c}\right)\Rightarrow t=\frac{t'}{\gamma}-\frac{\beta a}{c}$$

ולכן: $x'=\gamma\left(-a-\frac{\beta ct'}{\gamma}+\beta^2 a\right)=\gamma\left(-a\left(1-\beta^2\right)-\frac{\beta ct'}{\gamma}\right)=-\frac{a}{\gamma}-\beta ct'$.

ולכן גם בשיטה זו אנו מקבלים: $\vec{r}_1'=\left(-\frac{a}{\gamma}-\beta ct'\right)\hat{x}'$.

תשובה ג'

במערכת המעבדה: $\vec{F}\left(\vec{r}_1,t\right)=-q\vec{E}\left(\vec{r}_1,t\right)$.

במערכת המנוחה של החלקיק: $\vec{F}'\left(\vec{r}_1',t'\right)=-q\vec{E}'\left(\vec{r}_1',t'\right)$.

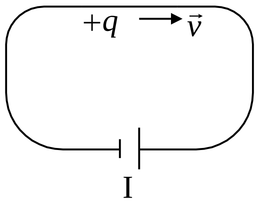
הרצאה 15 – מטען בוחן נע ומקורות השדה נעים, השדה המגנטי

א. מקור כוח נח ומקור השדה נע: $E'_\perp = E_\perp$, $E'_{||} = E_{||}$,

ב. מטען הבוחן נע ומקור השדה נח: $\vec{F} = q\vec{E}$.

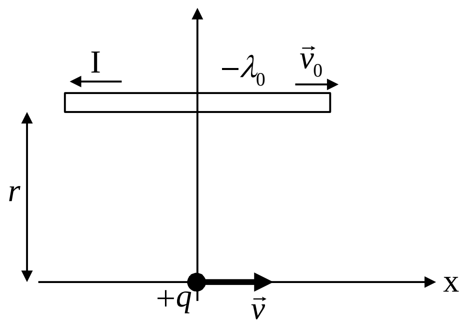
ג. מטען בוחן נע ומקורות השדה נעים

מקור השדה - זרם חשמלי ישר (קבוע) במעגל סגור.



הנחת קירוב: חישוב הכוח המופעל על q+ מבוצע רק מהקטע הישר של מעגל הזרם.

נסתכל על קטע ישר של תיל הזרם בו זרם I. נשאל מהו הכוח הפועל על מטען q++ הנע במקביל לתיל במהירות $+\vec{v}$



נתון: המטען q+ קרוב מאוד אל התיל - ולכן - נוכל להתייחס אל התייל כאל תיל אינסופי.
נשאל - מהו הכוח שפועל על q+?

התיל המוליך מורכב משני סוגים של מטענים:
מטענים חיוביים במנוחה - צפיפות מטען אורכית (קווית) של $+\lambda_0 \dfrac{esu}{cm}$.

מטענים שליליים (אלקטרונים) בצפיפות אורכית $-\lambda_0 \dfrac{esu}{cm}$ הנעים במהירות $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$.

הערה: מעגל חשמלי הוא תמיד נטראלי - סך כל המטענים עליו הוא אפס. עובדה זו נובעת מחוק שימור אנרגיה - בתחילה לא היו לנו מטענים במעגל. כאשר אנו מזיזים מטענים במעגל (זרם) - הם אינם נוצרים יש מאין - ולכן סה"כ המטענים במעגל הוא אפס.

נעבור אל S' - מערכת המנוחה של מטען הבוחן q+. צפיפויות המטען של המטענים החיובים והשליליים יהיו שונות במערכת זו. נצפה שבמערכת S' המוליך לא יהיה נטראלי.
נשאל: מהם λ'_+ ו- λ'_- במערכת S' ?

נגדיר: $\gamma_0 = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ $\beta_0 = \dfrac{v_0}{c}$. גדלים אלו קשורים אל המטענים השליליים.

כמו כן נגדיר $\gamma = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ $\beta = \dfrac{v}{c}$ עבור מטען הבוחן.

במערכת המנוחה של מטען הבוחן, המטענים החיוביים נעים. צפיפות המטען החיובי: $\lambda'_+ = +\gamma\lambda_0$.

במערכת המנוחה של המטענים השליליים, צפיפות המטען השלילי היא $-\dfrac{\lambda_0}{\gamma_0}$.

נעצור רגע נראה למה זו צפיפות המטען השלילי במערכת המנוחה.
ראשית נטען כי המטען במערכת המעבדה צפוף יותר מהמטען במערכת המנוחה של המטענים. טענה זו לפי עקרונות היחסות - הגוף יראה קצר יותר בכל מערכת בה הוא נע, לעומת מערכת בה הוא נח.
נניח כי צפיפות המטען במערכת המנוחה של האלקטרונים היא λ_k כלשהו, אזי צפיפות המטען במערכת בה המטען נע במהירות v_0 היא $\gamma_0 \cdot \lambda_k$. אולם, במקרה שלנו, נתונה לנו הצפיפות במערכת בה המטענים נעים - כלומר לפי הנתון שלנו $\gamma_0 \cdot \lambda_k = -\lambda_0$. מכאן, צפיפות המטען השלילי במערכת המנוחה - λ_k הינה $-\frac{\lambda_0}{\gamma_0}$.

נמצא כעת את מהירות המטענים ב- S' - המערכת בה נמצא מטען הבוחן q+ במנוחה.
נשתמש בטרנספורמצית המהירות:

$$v'_- = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}}$$

זוהי המהירות שבה צופה הנמצא על המטען q+ רואה את האלקטרונים נעים.

$$\beta'_- = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \qquad \gamma' = \frac{1}{\left[1 - \left(\beta'_-\right)^2\right]^{1/2}}$$

וכעת נוכל למצוא את צפיפות המטענים במערכת S' :

$$\lambda'_- = \left(-\frac{\lambda_0}{\gamma_0}\right)\gamma'_-$$

מה שעשינו כעת זו גישה מקובלת לפתרון בעיות: קודם כל עברנו אל מערכת המנוחה של המטענים, וממנה עברנו אל מערכת אחרת.

נפשט ביטויים:

$$\gamma'_- = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}\right)^2\right]^{1/2}} = \ldots = \gamma_0 \gamma \left(1 - \beta_0 \beta\right)$$

$$\lambda'_- = -\frac{\lambda_0}{\gamma_0}\gamma_0 \gamma \left(1 - \beta_0 \beta\right) = -\gamma \lambda_0 \left(1 - \beta_0 \beta\right)$$

$$\Delta\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \gamma\lambda_0 - \gamma\lambda_0 + \gamma\lambda_0 \beta\beta_0 = \gamma\lambda_0\beta\beta_0 = \gamma\lambda_0 \frac{v v_0}{c^2}$$

קיבלנו שבמערכת המנוחה של מטען הבוחן, קטע התיל טעון בצפיפות אורכית.
אנו יודעים שתיל ארוך הטעון בצורה אחידה יוצר שדה ומפעיל כוח חשמלי.
הכוח הפועל במערכת S' הינו: $\vec{F}' = (+q) \cdot \frac{2\Delta\lambda'}{r} \cdot (-\hat{y}) = (+q) \cdot \frac{2\gamma\lambda_0 v v_0}{rc^2} \cdot (-\hat{y})$

כוח זה הוא כוח דוחה.
נרצה למצוא הכוחב מערכת המעבדה: נבצע טרנספורמציה של הכוח ממערכת S' למערכת S.
ידוע: $F_\perp = \frac{1}{\gamma} F'_\perp$, ומכאן במערכת המעבדה פועל הכוח: $\vec{F}_y = -\frac{2q\lambda_0 v v_0}{rc^2}$.
הערה חשובה: התופעה שאנו מקבלים את הופעתו של כוח המפעיל תיל נושא זרם היא מטען נח היא תופעה יחסותית. ניתן לראות זאת גם מהמשוואה, על ידי כך שנשים לב לביטוי $\frac{v v_0}{c^2}$.

הראנו על ידי שימוש במערכת נוחה את העובדות הבאות:
אם המטען נח: לא פועל עליו כוח.
אם המטען נע: פועל על המטען כוח. זהו למעשה כוח חשמלי, אולם נתייחס אליו כאל כוח נוסף - כוח מגנטי - בעיקר מטעמים היסטוריים.

נביט ביחידות של הביטוי $\lambda_0 v_0$: $[\lambda_0 v_0] = \frac{esu}{cm}\cdot\frac{cm}{\sec} = \frac{esu}{\sec} = [I]$, ומכאן הזרם בתיל הינו $\boxed{I = \lambda_0 v_0}$

וכיוונו הפוך ל- v_0 , כיוונו הוא $-\hat{x}$.

כמו כן: $\boxed{F_y = -\frac{2qv\cdot I}{rc^2}}$. זהו כוח דוחה כאשר $\vec{v}\uparrow\downarrow \mathrm{I}$ (אנטי מקביל) וכוח מושך כאשר $\vec{v}\uparrow\uparrow \mathrm{I}$ (מקביל).

<u>**השדה המגנטי**</u>

כוח לורנץ (חלק מגנטי בלבד):
$$\vec{F} = \frac{q}{c}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$$

כמו כן, לפני רגע קיבלנו כי $\left|F_y\right| = \frac{q}{c}v\cdot\frac{2\mathrm{I}}{rc}$.

נגדיר את **השדה המגנטי**:

השדה המגנטי $\vec{B}(\vec{r})$ הנובע מתיל מוליך ישר אינסופי: $\boxed{B(r) = \frac{2\cdot\mathrm{I}}{rc}}$

<u>יחידות:</u>

ב-CGS:

$$[B] = \frac{[\mathrm{I}]}{[r][c]} = \frac{\frac{\mathrm{esu}}{\sec}}{\frac{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{cm}}{\sec}} = \frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{cm}^2} = [\mathrm{E}] = \mathrm{Gauss}$$

ב-SI:

$$\left|F_y\right| = q\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\mathrm{Iv}}{rc^2}$$

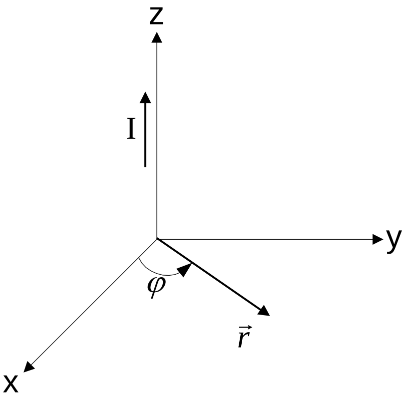
B יוגדר כך: $\boxed{B(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{2\cdot\mathrm{I}}{r}}$

נסמן: $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, כאשר μ_0 קבוע.

נוכל לתאר את השדה המגנטי גם בצורה הבאה: $\boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\cdot\mathrm{I}}{r}}$.

יחידות: $[B] = \mathrm{Tesla}$ ומתקיים: $1[\mathrm{Tesla}] = 10^4[\mathrm{Gauss}]$.

נשנה כעת את הבעיה שהצגנו. נבחר (מסיבות הסטוריות) את הזרם לנוע בכיוון $\hat{z}$.
לפי הגדרת הגודל של השדה המגנטי - לבעיה סימטריה
גלילית.



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r\left(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}\right)$$
$$\hat{r} = \cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}$$

השדה המגנטי בנקודה $\vec{r}$ הינו:

$$B(r) = \frac{2\cdot\mathrm{I}}{rc}\cdot\left[\hat{z}\times\hat{r}\right] = \frac{2\cdot\mathrm{I}}{rc}\cdot\left[\hat{z}\times\left(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}\right)\right] =$$
$$\frac{2\cdot\mathrm{I}}{rc}\cdot\left[-\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}\right]$$

המטען q+ נע במהירות $\vec{v} = v\hat{z}$. ידוע כי $\vec{F} = \frac{q}{c}\left[v\hat{z}\times\vec{B}\right]$, ולכן:

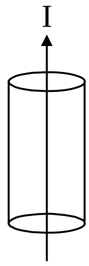
$$\vec{F} = \frac{q}{c}\left[v\hat{z}\times\vec{B}\right] = \frac{2qI\left|v\right|}{rc^2}\cdot\left[z\times\left(-\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}\right)\right] = \frac{2qI\left|v\right|}{rc^2}\cdot\left[-\cos\varphi\hat{x} - \sin\varphi\hat{y}\right]$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{2qI\left|v\right|}{rc^2}\left(-\hat{r}\right)}$$

<u>תכונות השדה המגנטי</u>

נקבל את תכונות השדה המגנטי משדה של תיל ישר. התכונות נכונות באופן כללי, אולם לא נוכיח זאת.

1. שטף השדה המגנטי דרך משטח סגור



נבחר משטח גלילי שהתיל הוא ציר הסימטריה שלו.
מתקיים: $\int_{\text{משטח גלילי}} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$, וזאת מכיוון שבכל נקודה על המעטפת הגלילית $d\vec{a} \perp \vec{B}$ וכן המשטחים מצמצמים זה את זה.

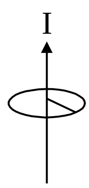
מכאן, לכל משטח סגור S : $\boxed{\int_{\text{S סגור}} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0}$

להשוואה, נוסחה מקבילה עבור $\vec{E}$ סטטי: $\int_{\text{S סגור}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi\int_{\tau}\rho d\tau$.

הערה: טבעת זרם היא הגודל הבסיסי של שדה מגנטי. אנו מדברים על דיפול. לא קיימים "מטענים מגנטיים".

2. חוק אמפר

$$\oint_{\text{מעגל}} \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{L} = \frac{2\cdot\mathrm{I}}{rc}\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\cdot\mathrm{I}$$



תרגול 6

שאלה 1

נתונים שני לוחות אינסופיים טעונים מקבילים למישור xy שהמרחק ביניהם במערכת המעבדה הוא d.
הלוח העליון נע במהירות $\vec{v}_1 = 0.6c\hat{x}$ יחסית למעבדה, והוא טעון בצפיפות משטחית σ במערכת המנוחה שלו.
הלוח התחתון נע במהירות $\vec{v}_2 = -0.8c\hat{x}$ יחסית למעבדה, והוא טעון בצפיפות משטחית $-\sigma$ במערכת המנוחה שלו.

א. חשבו את צפיפות המטען במערכת המעבדה של שני הלוחות.
ב. חשבו את השדה החשמלי של שני הלוחות במערכת המעבדה.
ג. חשבו את צפיפות המטען של הלוח התחתון במערכת הלוח העליון.
ד. חשבו את השדה החשמלי של שני הלוחות במערכת הלוח העליון.

תשובה א'

עבור הלוח העליון:
$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} = 1.25 \Rightarrow \sigma_u = \gamma_1\sigma \Rightarrow \sigma_u = 1.25\sigma$$

עבור הלוח התחתון:
$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} = 1\frac{2}{3} \Rightarrow \sigma_d = -\gamma_2\sigma \Rightarrow \sigma_d = -1.66\sigma$$

האורך בכיוון ציר x מתקצר בשיעור γ , ולכן צפיפות המטען גדלה בשיעור זה.

תשובה ב'

השדה של הלוח העליון:
$$\vec{E}'_u = \gamma_1\vec{E}_u = \begin{cases} +2\pi\sigma\gamma_1 = 2.5\pi\sigma\hat{z} & z > d \\ -2\pi\sigma\gamma_1 = -2.5\pi\sigma\hat{z} & z < d \end{cases}$$

השדה של הלוח התחתון:
$$\vec{E}'_d = \gamma_2\vec{E}_d = \begin{cases} +2\pi\sigma\gamma_2 = 3\frac{1}{3}\cdot\pi\sigma\hat{z} & z < 0 \\ -2\pi\sigma\gamma_2 = -3\frac{1}{3}\cdot\pi\sigma\hat{z} & z > 0 \end{cases}$$

ומכאן, השדה של שני הלוחות יחד הינו:
$$\vec{E} = \begin{cases} 2\pi\sigma\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\hat{z} = -\frac{5}{6}\sigma\pi\hat{z} & z > d \\ -2\pi\sigma\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\hat{z} = -5\frac{5}{6}\sigma\pi\hat{z} & 0 < z < d \\ -2\pi\sigma\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\hat{z} = \frac{5}{6}\sigma\pi\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

נשים לב שבניגוד ללוחות הנמצאים במנוחה במערכת המעבדה, במקרה זה השדה מחוץ לקבל שונה מאפס.

תשובה ג'

תוך שימוש בטרנספורמצית לורנץ של מהירויות, נוכל לומר כי במערכת המנוחה של הלוח העליון, הלוח התחתון נע במהירות $v_\perp = 0,\ v_\parallel = \frac{(-v_2)+V}{1+\left(\frac{-v_2V}{c^2}\right)}$, כאשר V היא מהירות מערכת המעבדה ביחס ללוח העליון - $V=-v_1$.

מכאן:

$$v_\parallel = -\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\right) = \frac{-(0.6+0.8)c}{1+0.48} = -0.94c$$

ומכאן צפיפות המטען של הלוח התחתון, כי שנראית במערכת של הלוח העליון:

$$\gamma_\parallel = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_\parallel}{c}\right)^2}} = 9.5 \Rightarrow \sigma_\parallel = -\gamma_\parallel\sigma = -9.5\sigma$$

תשובה ד'

השדה החשמלי של שני הלוחות במערכת המנוחה של הלוח העליון הוא הסכום של כל אחד מהשדות, של הלוח העליון של הלוח התחתון, במערכת המנוחה של הלוח העליון.

השדה של הלוח העליון במערכת המנוחה שלו:

$$\vec{E} = \begin{cases} 2\pi\sigma\hat{z} & z>d \\ -2\pi\sigma\hat{z} & z<d \end{cases}$$

השדה של הלוח התחתון במערכת המנוחה של הלוח העליון:

$$\vec{E} = \begin{cases} 2\pi\sigma\gamma_\parallel\hat{z} = 19\pi\sigma\hat{z} & z<0 \\ -2\pi\sigma\gamma_\parallel\hat{z} = -19\pi\sigma\hat{z} & z>0 \end{cases}$$

ולכן:

$$\vec{E} = \begin{cases} 2\pi\sigma(1-\gamma_\parallel)\hat{z} = -17\pi\sigma & z>d \\ -2\pi\sigma(1+\gamma_\parallel)\hat{z} = -20\pi\sigma & 0<z<d \\ -2\pi\sigma(1-\gamma_\parallel)\hat{z} = 17\pi\sigma & z<0 \end{cases}$$

<u>שאלה 2</u>

מטען נקודתי נע במהירות קבועה $V=\frac{c}{\sqrt{3}}$ מ $x=-\infty$ בכיוון חיובי על ציר x. בזמן $t=0$ המטען עוצר בבת אחת בראשית הצירים $(x=0, y=0)$. במישור, בנקודה $(0,L)$ נמצא צופה המודד את השדה החשמלי במקום הימצאו בשני זמנים: $t_1=\frac{L}{c}-\varepsilon,\ t_2=\frac{L}{c}+\varepsilon$, כאשר ε קטן מאוד יחסית ל- $\frac{L}{c}$.

מהי הזווית בין הכיוונים של השדות החשמליים שנמדדו? רשמו את השדה החשמלי בשני זמנים אלו.

תשובה

הזמן שלוקח לכדור האור להגיע מ-$(0,0)$ עד לנקודה $(0,L)$ היא $T=\frac{L}{c}$.

בזמן $t_1=\frac{L}{c}-\varepsilon$ כדור האור עדיין לא הגיע לצופה ולכן הוא רואה שדה של מטען הנמצא בנקודה $x=t_1V=\left(\frac{L}{c}-\varepsilon\right)\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{L}{\sqrt{3}}$.

לכן, הזווית עם ציר $\hat{y}$ של השדה היא $\tan\theta=\frac{\frac{L}{\sqrt{3}}}{L}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftarrow\theta=30°$.

נמצא את השדה ברגע $t_1=\frac{L}{c}-\varepsilon$. נסמן ב-$S'$ את מערכת החלקיק, וב-S את מערכת המעבדה.

במערכת החלקיק: $y'=y$, $x'=\gamma(x+vt)$.

השדה במערכת החלקיק:

$$E'_x=\frac{Qx'}{\left[x'^2+y'^2\right]^{3/2}}$$

$$E'_y=\frac{Qy'}{\left[x'^2+y'^2\right]^{3/2}}$$

הנקודה בה נמצא הצופה היא $(x=0,y=L)$. נציב $t=\frac{L}{c}$, ומכאן:

השדה במערכת החלקיק:

$$E'_x=\frac{Q\gamma\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{L}{c}}{\left[\left(\gamma\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{L}{c}\right)^2+L^2\right]^{3/2}}=\frac{Q\gamma\cdot\frac{L}{\sqrt{3}}}{\left[\left(\gamma\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2+L^2\right]^{3/2}}$$

$$E'_y=\frac{QL}{\left[\left(\gamma\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{L}{c}\right)^2+L^2\right]^{3/2}}=\frac{QL}{\left[\left(\gamma\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2+L^2\right]^{3/2}}$$

השדה במערכת המעבדה S הינו: $E_y=\gamma E'_y$, $E_x=E'_x$.

ולכן:

השדה במערכת המעבדה:

$$E_x=\frac{Q\gamma\cdot\frac{L}{\sqrt{3}}}{\left[\left(\gamma\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2+L^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y=\frac{Q\gamma\cdot L}{\left[\left(\gamma\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2+L^2\right]^{3/2}}$$

אכן מתקיים כי: $\tan\theta=\frac{E_x}{E_y}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

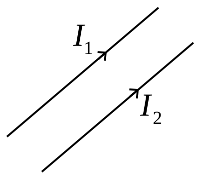
השדה בזמן $t_2=\frac{L}{c}+\varepsilon$ הוא שדה של חלקיק במנוחה: $\vec{E}=\frac{Q}{L^2}\hat{y}$.

השלמה - הכוח המגנטי הפועל בין שני תיילים נושאי זרם

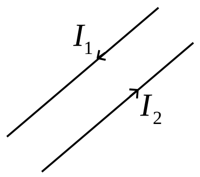
נחשב בעזרת הגדרת השדה המגנטי, את הכוח המגנטי הפועל בין שני תיילים מקבילים נושאי זרם.
נסמן ב-r את המרחק בין התילים, וב- I_1, I_2 את הזרמים הזורמים בהם.
אנו מניחים שלתילים יש אורך אינסופי. אנו רוצים לחשב את הכול הפועל על קטע של אחד התילים, שיש לו אורך סופי l. הזרם בתיל 1 יוצר שדה מגנטי, שעוצמתו במקום הימצאו של תיל 2 היא $B_1 = \frac{2I_1}{cr}$.
בתוך תיל 2, בכל ס"מ אורך שלו, יש n_2 מטענים נעים, לכל אחד מהם מטען q ומהירות v_2. מטענים נעים אלה מהווים את הזרם I_2. $I_2 = n_2 q_2 v_2$. לפי חוק לורנץ, הכוח הפועל על כל אחד מהמטענים הוא $q_2 v_2 B_1 / c$, ומכאן הכוח הפועל על כל קטע באורך ס"מ בתיל 2 הוא $q_2 v_2 n_2 B_1 / c$, או $I_2 B_1 / c$.
כעת אנו יכולים לנסח את הכוח הפועל על קטע באורך l של תיל 2: $\boxed{F = \frac{2I_1 I_2 l}{c^2 r}}$.

הכוח על קטע l על תיל 1, הנוצר עקב השדה המגנטי של תיל 2 ניתן בצורה זהה.

אם הזרם בשני התיילים הוא באותו כיוון, הכוח ביניהם הוא כוח משיכה.

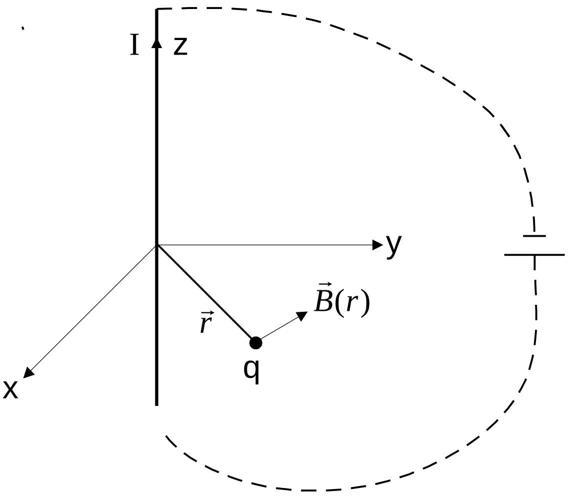


אם הזרם בשני התיילים הוא בכיוונים מנוגדים, הכוח ביניהם הוא כוח דחייה.



הרצאה 16 – כוח המופעל על מטען ממקורות נעים, תכונות השדה המגנטי הנובע מזרמים קבועים, הפוטנציאל המגנטי

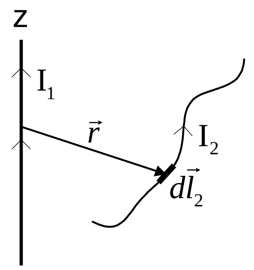
כוח המופעל על מטען q ממקורות נעים



מקרה פרטי - תיל נושא זרם ⇐ מקור הכוח מהווה מערכת נטראלית.
ניקח תיל ישר אינסופי, הזורם בו זרם I. התיל הינו חלק ממעגל זרם, אולם המעגל נסדר רחוק, ולכן אנו יכולים להתעלם מהמעגל, ולהתייחס רק לתיל.

מתקיים:

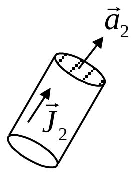
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= \frac{q}{c}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r})\right]\\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{2I}{rc}\cdot\left[\hat{z}\times\hat{r}\right]\end{aligned}}$$



במקרים רבים נתעניין בכוח הפועל בין שני תיילים נושאי זרם, ולא בתיל בודד.

נשאל: מהו הכוח ש- I_1 מפעיל על I_2 ?

על מנת למצוא כוח זה, נכתוב את הכוח אותו מפעיל I_1 על אלמנט קטן (שנניח שהוא ישר) על I_2 .
נגדיל את הקטע $d\vec{l}_2$:



$$I_2 = \left(\vec{J}_2\cdot\vec{a}_2\right)$$
$$d\tau_2 = \left(\vec{a}_2\cdot d\vec{l}_2\right)$$
$$\vec{J}_2 = n_2 q_2 \vec{v}_2$$

הכוח שמפעיל הזרם I_1 על מטען q_2 אחד:

$$\vec{f}_{21} = \frac{q_2}{c}\cdot\left[\left(\vec{v}_2\times\vec{B}_1\left(\vec{r}_{21}\right)\right)\right]$$

בקטע $d\tau_2$ ישנם $n_2\cdot d\tau_2$ נושאי מטען.

$$d\vec{F}_{21} = \vec{f}_{21}\cdot n_2\cdot d\tau_2 = \frac{1}{c}\left[q_2\cdot n_2\cdot\left(\vec{a}_2\cdot d\vec{l}_2\right)\left(\vec{v}_2\times\vec{B}_1\left(\vec{r}_{21}\right)\right)\right] = \frac{1}{c}\left[q_2\cdot n_2\cdot\vec{v}_2\cdot\vec{a}_2\cdot\left(d\vec{l}_2\times\vec{B}_1\left(\vec{r}_{21}\right)\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{c}\left[I_2\cdot\left(d\vec{l}_2\times\vec{B}_1\left(\vec{r}_{21}\right)\right)\right] = \frac{I_2}{c}\left[d\vec{l}_2\times\frac{2I_1}{c\cdot r_{21}}\cdot\left(\hat{z}\times\hat{r}_{21}\right)\right] = \frac{2\cdot I_1\cdot I_2}{c^2\cdot r_{21}}\left[d\vec{l}_2\times\left(\hat{z}\times\hat{r}_{21}\right)\right]$$

הכוח פרופורציוני למכפלת הזרמים חלקי המרחק ביניהם.

תכונות השדה המגנטי הנובע מזרמים קבועים

נקבל את תכונות השדה המגנטי משדה של תיל ישר. נניח כי $\vec{J}(\vec{r})$ איננו תלוי בזמן t.

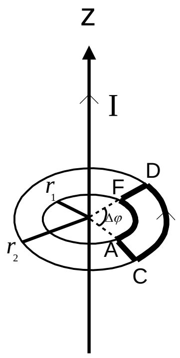
1. שטף השדה המגנטי דרך משטח סגור

לכל משטח סגור S : $\int_{S\ \text{סגור}} \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$

2. חוק אמפר

$$\oint_{\text{מעגל}} \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{L}=\frac{2\cdot \mathrm{I}}{rc}\cdot 2\pi r=\frac{4\pi}{c}\cdot \mathrm{I}$$

מהי הסירקולציה על מסלול שאינו מקיף את התיל נושא הזרם?
ניקח מסלול לדוגמא ונבדוק זאת.
במקרה זה:



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{L}=\underbrace{\int_{AC} \vec{B}\cdot d\vec{L}}_{=0}+\underbrace{\int_{DF} \vec{B}\cdot d\vec{L}}_{=0}+\int_{CD} \vec{B}\cdot d\vec{L}-\int_{FA} \vec{B}\cdot d\vec{L}=$$

$$=\frac{2I}{cr_2}\left(r_2\cdot\Delta\varphi\right)-\frac{2I}{cr_1}\left(r_1\cdot\Delta\varphi\right)=0$$

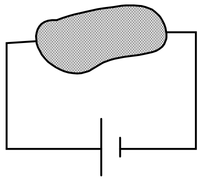
שני האינטגרלים הראשונים הם אפס כי השדה המגנטי ניצב לכיוון האינטגרל.
$r_2\cdot\Delta\varphi$ הינו אורך החוט, וכן $r_1\cdot\Delta\varphi$

קיבלנו שהסירקולציה על מסלול שאינו מקיף את התיל נושא הזרם היא אפס.

הרחבת חוק אמפר

נתונים מספר מעגלי זרם במרחב. נבחר מסלול סגור כלשהו $\vec{c}$. מעקרון הסופרפוזיציה של שדות נקבל כי $\oint_{\mathrm{C}} \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{L}=\frac{4\pi}{c}\cdot\sum_{j=1}^{N}\mathrm{I}_j$. הסכום הינו סכום אלגברי (עם סימן) של הזרמים.

חוק אמפר להתפלגות נפחית של זרמים



התפלגות נפחית של זרמים: $\vec{J}(\vec{r})$ - יכולה להיות שונה בכל נקודה.
S הוא משטח פתוח בתוך המוליך.

הזרם I החוצה את המשטח S: $\mathrm{I}=\int_S \vec{\mathrm{J}}\cdot d\vec{a}$.

C - מסלול סגור המהווה את השפה של S.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{L}=\frac{4\pi}{c}\cdot\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

נשים לב שניתן במקרה זה להשתמש במשפט סטוקס: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{L} = \int_S curl\vec{B}\cdot d\vec{a}$.

מכאן נגיע למסקנה כי $\int_S curl\vec{B}\cdot d\vec{a} = \frac{4\pi}{c}\cdot\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$.

האינטגרל נכון לכל משטח שהוא, ומכאן גם האינטגרנדים שווים.

נקבל את חוק אמפר בצורה דיפרנציאלית: $\boxed{curl\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{J}}$

נמצא כעת גם את חוק השטף בצורה דיפרנציאלית. כזכור, השטף של $\vec{B}$: $\int_{S\ \text{סגור}} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$

נשתמש במשפט גאוס: $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0 = \int_\tau div\vec{B}d\tau$.

מכאן נקבל את חוק השטף בצורה דיפרנציאלית: $\boxed{div\vec{B} = 0}$

<u>הקבלה מתמטית בין תכונות השדה החשמלי לבין תכונות השדה המגנטי</u>

	שדה אלקטרוסטטי $\vec{E}(\vec{r})$	**שדה מגנטי** $\vec{B}(\vec{r})$
חוק גאוס -	$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi\int_\tau \rho d\tau$	$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$
חוק שימור אנרגיה -	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{L} = 0$	
חוק אמפר -		$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$

נשים לב שהכוח המגנטי הוא $\vec{F} = q\vec{V}\times\vec{B}$.

חוק שימור האנרגיה מתקיים באופן טריויאלי עבור הכוח המגנטי:

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{L} = \frac{q}{c}\cdot\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\cdot\vec{V}\cdot dt = 0}$$

הערה חשובה היא שחוק אמפר איננו חוק שימור האנרגיה. חוק אמפר מקשר בין $\vec{B}$ לבין המקורות שלו.

<u>חוקי הייסוד לשדה חשמלי ושדה מגנטי בצורה דיפרנציאלית</u>

	שדה אלקטרוסטטי $\vec{E}(\vec{r})$	**שדה מגנטי** $\vec{B}(\vec{r})$
חוק גאוס -	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
חוק שימור אנרגיה -	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{J}$

<u>הפוטנציאל המגנטי</u>

<u>תזכורת</u>

עבור שדה חשמלי $\vec{E}(\vec{r})$ מתקיים: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi \qquad (*)}$, כאשר φ היא פונקצית פוטנציאל סקלרית.

מתקיים כי $4\pi\varphi=-\nabla^2\varphi=-\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right)-$, וכך קיבלנו את משוואת פואסון: $\nabla^2\varphi=-4\pi\varphi$.

באופן כללי לגמרי, בהנחה שהתפלגות המטענים היא בעלת גודל סופי: $\varphi(\vec{r})=\int_\tau \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

<u>כעת</u>

נשתמש בשתי משוואות הייסוד של השדה המגנטי כדי לקבל ביטוי מקביל לזה שקיבלנו עבור השדה החשמלי. **הפוטנציאל המגנטי** (הנקרא גם פוטנציאל ווקטורי) יסומן ב- $\vec{A}(\vec{r})$.

בהקבלה ל-(*), נבחר כי $\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})}$.

נבדוק כי הבחירה מקיימת את המשוואות היסודיות:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\equiv 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]=\frac{4\pi}{c}\vec{J}}$$

תזכורת: $\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right]=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

במקרה שלנו:

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

נזכור כי פונקצית הפוטנציאל הסקלרית מוגדרת עד כדי קבוע. במקרה של פוטנציאל ווקטורי, נוכל לבחור שרירותית את $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ להיות אפס, ואז נקבל:

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J}}$$

זוהי משוואת פואסון לפונקציה ווקטורית עבור הפוטנציאל הווקטורי $\vec{A}(\vec{r})$.

הרצאה 17 – משוואת פואסון לפונקציה וקטורית, חוקי ביו-סבר, סולונואיד

משוואת פואסון לפונקציה וקטורית $\vec{A}(\vec{r})$

בהרצאה הקודמת קיבלנו את משוואות פואסון: $\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}}$.

כל אחד מרכיבי $\vec{A}$ מקיים את משוואת פואסון, ולכן ניתן לרשום:

$$\nabla^2 A_x(\vec{r}) = \frac{\partial^2 A_x(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(r)}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c} J_x(\vec{r})$$

ובאופן דומה לרשום משוואות גם עבור $A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})$.

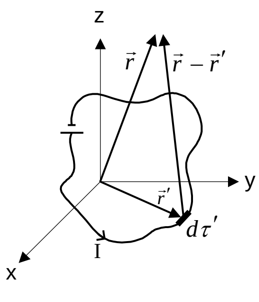
באלקטרוסטטיקה קיבלנו מ- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ ומ- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ את משוואת פואסון $\nabla^2\varphi = -4\pi\varphi$.
באופן אנלוגי קיבלנו עבור שדה מגנטי את משוואת פואסון לפונקציה וקטורית.
ראינו כי הפתרון הפורמלי עבור הפוטנציאל כאשר $\rho(\vec{r})$ סופית הוא $\varphi(\vec{r}) = \int_\tau \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

באופן אנלוגי לצפיפות הזרם $\vec{J}(\vec{r})$ נציג את הפתרון הפורמלי עבור $\vec{A}(\vec{r})$:

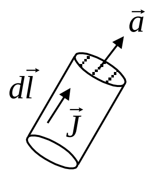
$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\cdot\int_\tau \frac{\vec{J}(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

למה איננו צריכים לדרוש כי $\vec{J}$ תהיה סופית? מכיוון שהיא חייבת להיות סופית, הרי המעגל נסגר.

מקרה פרטי - לולאת זרם



נגדיל את הקטע $d\tau'$:



מתקיים: $\vec{J}d\tau' = \vec{J}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{l}'\right) = \left(\vec{J}\cdot\vec{a}\right)\cdot d\vec{l}' = \mathrm{I}\cdot d\vec{l}'$

ומכאן:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\cdot\int_\tau \frac{\vec{J}(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\cdot\oint_{\text{לולאה}} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

האינטגרל הוא גודל גיאומטרי - תלוי בצורת המעגל.

<u>תזכורת</u>

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=-\vec{\nabla}\int_{\rho}\frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=-\int_{\rho}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\cdot\rho(\vec{r}\,')d\tau$$

מתקיים: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=-\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ מכיוון ש:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\right]=\frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

וכמו כן:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\right]=\frac{(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\right]=\frac{(z-z')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

ובצורה זו אנו מקבלים כי: $E(\vec{r})=\int_{\tau}\frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$.

נבצע כעת חישוב דומה עבור השדה המגנטי:

$$\vec{\mathrm{B}}=\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}=\vec{\nabla}\times\frac{1}{c}\cdot\int_{\tau}\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{c}\cdot\int_{\tau}\left[\vec{\nabla}\times\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]d\tau'=\frac{1}{c}\cdot\int_{\tau}\frac{-(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d\tau'$$

$$\vec{\mathrm{B}}=\frac{1}{c}\cdot\int_{\tau}\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d\tau'$$

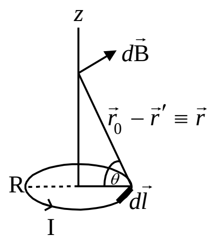
<u>**חוק ביו-סבר**</u>

במקרה הפרטי של לולאת זרם, נקבל את **חוק ביו-סבר**:

$$\boxed{\vec{\mathrm{B}}==\vec{\nabla}\times\frac{\mathrm{I}}{c}\int\frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{\mathrm{I}}{c}\oint\frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

<u>דוגמא</u>

שימוש בחוק ביו-סבר לחישוב $\vec{B}$ של טבעת זרם, על ציר הסימטריה הניצב למישורה.



התרומה של $d\vec{l}'$ היא $d\vec{B}$.
על ציר הסימטריה בלבד מתקיים כי הרכיבים בכיוון הרידאלי יתאפסו.
הרכיב dB_z (הרכיב בכיוון z) הינו:

$$dB_z = |dB|\cos\theta = \frac{I}{C}\cdot\frac{dl}{r^2}\cos\theta = \frac{I}{C}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{R}{r}dl = \frac{I}{C}\cdot\frac{R}{r^3}\cdot dl$$

זוהי התרומה של האלמנט dl לרכיב בכיוון z של השדה. על מנת לקבל את השדה כולו, נבצע אינטגרל:

$$\boxed{B_z(z) = \frac{I}{c}\cdot\frac{2\pi R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}}$$

במרכז הטבעת יתקיים: $B_z(z=0) = \frac{2\pi\cdot I}{cR}$. שטח הלולאה הינו $\boxed{\vec{S} = \pi R^2\hat{z}}$,

ולכן על ציר הסימטריה z נקבל כי: $\vec{B}(z) = \frac{2I\cdot\vec{S}}{c\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$

<u>הערה חשובה</u>

ראינו כאן ניסוח יותר פשוט ושימושי לחוק ביו-סבר, והוא: **חוק ביו-סבר:** $\boxed{dB = \frac{I\cdot d\vec{l}\times\hat{r}}{cr^2}}$

כאשר: $d\vec{l}$ - כיוון אלמנט הנפח (כיוון אלמנט תיל), $\hat{r}$ ווקטור יחידה בכיוון $\vec{r}$.

כמו כן - $d\vec{B}$ מאונך למישור שיוצרים $d\vec{l}$ ו- $\hat{r}$.

הוכחת ביו-סבר: מציאת תרומת $d\vec{A}$ וביצוע רוטור עליו, על מנת לקבל את $d\vec{B}$.

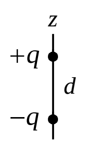
חוק ביו-סבר בצורה אנליטית: $\boxed{dB_k = \frac{\varepsilon_{i,j,k}dl_i\cdot r_j}{cr^2}}$

<u>הגדרה</u>

מומנט דיפול מגנטי של טבעת זרם המונחת במישור xy: $\boxed{\vec{m} = \frac{I}{c}\cdot\vec{S}}$

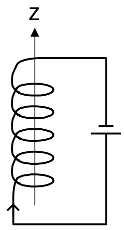
עבור טבעת זרם נקבל: $\boxed{\vec{B}(z) = \frac{2\vec{m}}{r^3}}$

אנלוגיה למומנט דיפול חשמלי: $\vec{P} = q\vec{a} = qa\hat{z}$, $\vec{E}(z) = \frac{2\vec{P}}{r^3}$.



עבור לולאת בעלת מומנט מגנטי $\vec{m}$ הנמצאת תחת השפעת שדה מגנטי $\vec{B}$,
נגדיר את **מומנט הכוח הפועל על דיפול מגנטי** בשדה חיצוני בצורה הבאה: $\boxed{\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}}$.

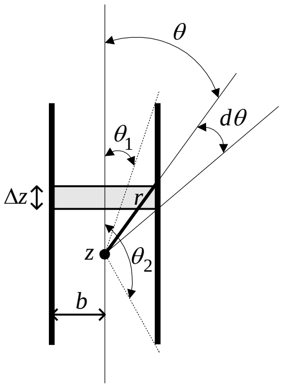
שדה מגנטי הנוצר על ידי סליל ישר נושא זרם I - סולונואיד



נוכל להתייחס לסליל כאל טבעות הנמצאות אחת על השניה. על מנת למצוא את השדה נחבר את תרומות כל הטבעות. כל ליפוף של הסליל יהיה טבעת נושאת זרם שרדיוסה R.

צפיפות הטבעות - כריכות (ליפופים) ליחידת אורך. $n:\frac{\text{ות:}}{cm}$. $\Leftarrow$

באורך Δz יהיו $n\cdot\Delta z$ כריכות.



נביט בחתך על קטע באורך Δz, ונרצה לחשב את השדה בנקודה כלשהי הנמצאת על ציר הסימטריה - הנקודה z. נתייחס אל החתך כאל טבעת נושאת זרם, ונסכם את הטבעות מהם מורכב הסליל.
את טבעת הזרם נאפיין על ידי שני רדיוסים המאופיינים על ידי שתי זוויות: θ ו- $\theta+d\theta$. גובה האלמנט Δz הינו $\Delta z = rd\theta/\sin\theta$.
זרם בטבעת שעוביה Δz: $\Delta I = I\cdot n\cdot\Delta z$, ולכן בטבעת עובר הזרם: $Inrd\theta/\sin\theta$. ניתן לראות כי $r=b/\sin\theta$, ולכן אנו יכולים לרשום את התרומה של טבעת זו לשדה של הציר כך:

$$dB_z = \frac{2\pi b^2}{cr^3}\cdot\frac{Inrd\theta}{\sin\theta} = \frac{2\pi In}{c}\sin\theta d\theta$$

נבצע אינטגרציה בין הגבולות θ_1 ו θ_2 על מנת לקבל את השדה המגנטי:

$$B_z = \frac{2\pi In}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{2\pi In}{c}\cdot\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

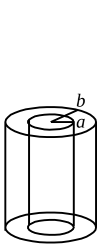
עבור סליל אינסופי יתקיים כי $\theta_1=0$ וכן $\theta_2=\pi$, ונקבל את **השדה של סליל בעל אורך אינסופי**:

$$\boxed{B_z = \frac{4\pi In}{c}}$$

השדה אחיד בכל נקודה ונקודה בכל איזור בסליל, ללא תלות במקום החתך. ניתן להקביל בין הסליל לבין קבל לוחות היוצר שדה חשמלי אחיד.

מחוץ לסליל האינסופי, מתקיים כי $\boxed{B=0}$, וזאת עקב חוק אמפר - $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c}\left(n\cdot\Delta z\right)\cdot I$.

שימוש בחוק אמפר לחישוב השדה המגנטי של סליל בצורת טורוס



בטורוס זורם זרם I סופי. מטעמי סימטריה, יכול להיות שדה מגנטי רק בתוך הסליל, ולא מחוצה לו. כאשר $a<r<b$, מתקיים כי $\vec{B}\neq 0$.

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}NI$$

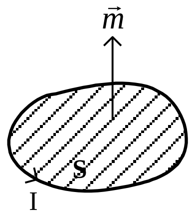
ומכאן:

$$2\pi r(B(r)) = \frac{4\pi NI}{c} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{2NI}{rc}\hat{\theta}}$$

כאשר N הוא מספר הכריכות הכולל.

<u>תרגול 8</u>

<u>נוסחאות</u>



1. **מומנט דיפול מגנטי** של טבעת זרם: $\vec{m}=\frac{\mathrm{I}}{c}\cdot\vec{S}$
2. **חוק ביו-סבר:** $d\mathrm{B}=\frac{\mathrm{I}\cdot d\vec{l}\times\hat{r}}{cr^2}$
3. **שדה מגנטי של טבעת זרם** מישורית בכיוון ניצב למישור הטבעת:
$$\mathrm{B}=\frac{2\pi\cdot\mathrm{I}}{cr}$$
4. **מומנט הכוח הפועל על דיפול מגנטי** בשדה חיצוני: $\vec{\mathrm{N}}=\vec{m}\times\vec{\mathrm{B}}$.

<u>תרגיל 1</u>

נתונה לולאה ריבועית, בעלת צלע α במישור xy. בלולאה זורם זרם I.
כמו כן, ישנו שדה מגנטי חיצוני $\vec{B}=B_0\hat{x}$.

א. מהו המומנט הפועל על הלולאה ביחס לציר y?
ב. מהו מומנט הדיפול החשמלי על הלולאה?

תשובה א'

נזכר בהגדרת המומנט. המומנט הוא נגזרת לפי זמן של התנע הזוויתי. התנע הזוויתי מוגדר $J=\vec{r}\times\vec{p}$.
לפיכך: $\frac{d}{dt}\vec{J}=\frac{d}{dt}\vec{r}\times\vec{p}=\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\vec{p}}_{0}+\vec{r}\times\underbrace{\dot{\vec{p}}}_{F}$ ומכאן מגיעים לתוצאה כי המומנט הוא $\boxed{\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}}$.

נשאל: מהו הכוח החשמלי שמפעיל השדה המגנטי על הצלעות השונות של הלולאה הריבועית?
כוח לורנץ: $\vec{F}=\frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$. לפיכך, על צלעות שכיוונן מקביל כיוון הכוח המגנטי לא פועל כוח. על שתי הצלעות שכיוונן ניצב לשדה המגנטי פועל כוח. על אחת מהן יפעל כוח בכיוון $\hat{z}$ ועל השניה יפעל כוח בכיוון $-\hat{z}$, וזאת לפי כלל יד ימין.
נתון לנו הזרם (I) - איך נמצא מכאן את המטענים (q) שבתנועה?
נסמן ב-Q מטען על צלע אחת. מתקיים: $\vec{I}=\left(\frac{Q}{a}\right)\vec{v}$, ומכאן:
על צלע אחת: $\vec{F}_1=\frac{Q}{c}\vec{v}\times\vec{B}=\frac{a}{c}\vec{I}\times\vec{B}=\frac{a}{c}IB_0\left(-\hat{z}\right)$. ועל הצלע השניה: $\vec{F}_2=\frac{a}{c}IB_0\left(\hat{z}\right)$
ומכאן: $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}=\left(\frac{a}{2}\hat{x}\right)\times\left(\frac{a}{c}IB_0\cdot(-\hat{z})\right)+\left(\frac{a}{2}\cdot(-\hat{x})\right)\times\left(\frac{a}{c}IB_0\cdot(\hat{z})\right)=\frac{a^2}{c}IB_0\hat{y}$

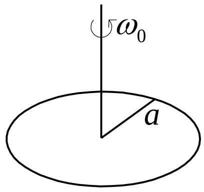
תשובה ב'

$$\vec{m}=\frac{\mathrm{I}}{c}\cdot\vec{S}=\frac{\mathrm{I}}{c}\cdot a^2\hat{z}$$

לפי נוסחה 4, נוכל לחשב את $\vec{N}$ בקלות:

$$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}=\left(\frac{I}{c}\cdot a^2 B_0\hat{z}\right)\times\left(B_0\hat{x}\right)=\frac{I}{c}\cdot a^2 B_0\hat{y}$$

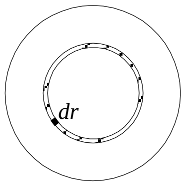
תרגיל 2



דיסקה מבודדת בעלת רדיוס a הנמצאת על מישור xy מסתובבת במהירות זוויתית ω_0 וטעונה בצפיפות מטען רדיאלית $\sigma(r)=\sigma_0\frac{r}{a}$.

חשב את השדה המגנטי במרכז הדיסקה.

תשובה



שלבי הפיתרון:

- נמצא את $dq(r)$ - המטען בטבעת בודדת.
- נמצא את $dI(r)$ - הזרם בטבעת בודדת.
- נמצא את $dB(r)$ - השדה שיוצרת הטבעת במרכז הדיסקה.
- $B=\int dB(r)$ - השדה שיוצרות כל הטבעות (=הדיסקה) במרכז.

$$dq(r)=2\pi r\cdot dr\cdot\sigma_0\cdot\frac{r}{a}$$

$$dI(r)=\frac{dq(r)}{T_0}$$

כאשר T_0 זהו זמן המחזור, והוא $T_0=\frac{2\pi}{w_0}$.

$$dI(r)=\frac{dq(r)}{T_0}=\frac{dq(r)\cdot w_0}{2\pi}=\frac{\sigma_0\cdot w_0}{a}\cdot r^2 dr$$

נשתמש בנוסחה לשדה של טבעת זרם:

$$dB(r)=\frac{2\pi\cdot dI}{cr}=\frac{2\pi w_0\sigma_0 r}{ac}dr\cdot(\hat{z})$$

$$B=\int_0^a dB(r)=\frac{2\pi w_0\sigma_0}{ac}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot(\hat{z})=\frac{\pi w_0\sigma_0 a}{c}\cdot(\hat{z})$$

שאלות

שאלה 1

נתון גליל מוליך אינסופי מלא בעל רדיוס a, הנושא זרם בצפיפות $\vec{J}(r) = J_0 \frac{r}{a}\hat{z}$. לאורך ציר הגליל (ציר z) עובר תיל מוליך דק שדרכו חוזר כל הזרם I בכיוון ההפוך ל- $\vec{J}$.

א. חשבו את I באמצעות $\vec{J}$.
ב. חשבו את השדה המגנטי עבור $0 < r < a$ בעזרת חוק אמפר.

תשובה א'

ידוע כי $\mathrm{I}=\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{A}}$ כאשר $\vec{\mathrm{A}}$ שטח חתך, ולכן:

$$\mathrm{I}=\vec{\mathrm{J}}\cdot\vec{\mathrm{A}} \Rightarrow d\mathrm{I} = \vec{J}(r)\cdot d\vec{a} = J_0 \frac{r}{a}\cdot da$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a J_0 \frac{r}{a}\cdot r dr = 2\pi \frac{J_0}{a}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{2\pi J_0 a^2}{3}$$

תשובה ב'

חוק אמפר: $\oint_{\text{מעגל}} \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c}\cdot \mathrm{I}$. כמו כן, הגדרת השדה המגנטי הינה: $\vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \frac{2\mathrm{I}}{rc}\cdot\left[\hat{z}\times\hat{r}\right]$

הערה לגבי חוק אמפר: חוק זה מקביל לחוק גאוס - במובן הבא: נניח למשל שהיה לנו גליל חלול שבקליפה שלו זורם זרם. השדה המגנטי בתוך הגליל היה אפס - כי לפי חוק אמפר, על מעגל בתוך הגליל מתקיים $\oint_{\text{מעגל}} \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c}\cdot 0 = 0$, ומכאן גם השדה המגנטי שווה אפס. ניתן גם להכליל את הערה ולקשרה לענייננו - השדה ברדיוס r אינו מושפע מהזרמים הנמצאים ברדיוס גדול מ-r.
השדה המגנטי בכל נקודה בין $0 < r < a$ הוא השדה המגנטי של גליל ברדיוס r ועוד השדה המגנטי של התיל (שסימנו הפוך, מכיוון שבתיל זורם הזרם בכיוון הפוך).

$$\mathrm{I(r)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r J_0 \frac{r}{a}\cdot r dr = 2\pi \frac{J_0}{a}\cdot\frac{r^3}{3}$$

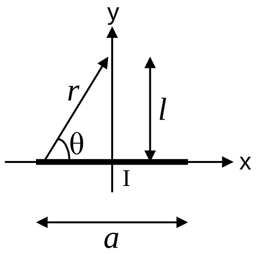
$$\vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \vec{\mathrm{B}}_{\text{גליל}} + \vec{\mathrm{B}}_{\text{תיל}}$$

$$\vec{B}_{\text{תיל}} = \frac{2\mathrm{I}}{rc}\cdot\left[-\hat{z}\times\hat{r}\right] = \frac{2\cdot 2\pi \frac{J_0 a^2}{3}}{rc}\cdot\hat{\theta} = -\frac{4\pi J_0}{3c}\cdot\left(\frac{a^2}{r}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{\mathrm{B}}_{\text{גליל}} = \frac{2\mathrm{I}}{rc}\cdot\left[\hat{z}\times\hat{r}\right] = \frac{2\cdot 2\pi \frac{J_0}{a}\cdot\frac{r^3}{3}}{rc}\cdot\hat{\theta} = \frac{4\pi J_0}{3c}\cdot\left(\frac{r^2}{a}\right)\hat{\theta}$$

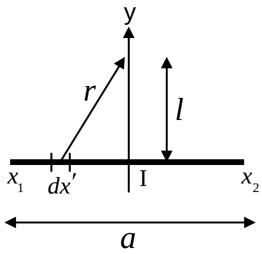
$$\vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \frac{4\pi J_0}{3c}\cdot\left(\frac{r^2}{a} - \frac{a^2}{r}\right)\hat{\theta}$$

<u>שאלה 2</u>



חשבו את השדה המגנטי של תיל באורך a הנושא זרם I, בנקודה הנמצאת במרחק l מאמצע התיל.

תשובה



נפתור את הבעיה על ידי חישוב הפוטנציאל הווקטורי, וממנו חישוב השדה המגנטי $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

$$\vec{A}=\frac{I}{C}\int\frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{I}{C}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx'}{\sqrt{x'^2+y^2}}\cdot\hat{x}=\frac{I}{C}\hat{x}\cdot\ln\left(x'+\sqrt{x'^2+y^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\vec{A}=\frac{I}{C}\hat{x}\cdot\left(\ln\left(x_2+\sqrt{x_2{}^2+y^2}\right)-\ln\left(x_1+\sqrt{x_1{}^2+y^2}\right)\right)$$

ידוע כי $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ומכאן $B_z=-\frac{\partial}{\partial y}A_x$.

$$B_z=\frac{I}{c}\left[\underbrace{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x_1{}^2+y^2}\cdot 2y}{x_1+\sqrt{x_1{}^2+y^2}}}_{\text{I}}-\underbrace{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x_2{}^2+y^2}\cdot 2y}{x_2+\sqrt{x_2{}^2+y^2}}}_{\text{II}}\right]$$

נניח כי: $x_1=-L, x_2=L, y\ll L$.

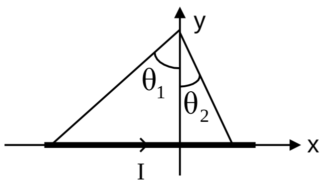
נקבל:

$$\text{I}\approx\frac{L^{-1}y}{L+L}=\frac{y}{2L^2}\to 0$$

$$\text{II}=\frac{L^{-1}y}{-L+\sqrt{L^2+y^2}}=\frac{L^{-1}y}{-L+L\sqrt{1+\frac{y^2}{L^2}}}=\frac{y}{\frac{1}{2}y^2}=\frac{2}{y}$$

והתוצאה הסופית: $\boxed{B_z(y)=\frac{2I}{cy}}$

השדה במרחק y מתיל סופי: $\vec{B}(y)=\frac{I}{cy}\cdot\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)\hat{z}$.



אם נציב: $\alpha_1=\frac{\pi}{2},\alpha_2=-\frac{\pi}{2}$ נקבל $\boxed{\vec{B}(y)=\frac{2I}{cy}\hat{z}}$

<u>שאלה 3</u>

חשבו את השדה המגנטי של תיל חצי אינסופי הנושא זרם I, על ציר y הניצב לתייל בקצהו.

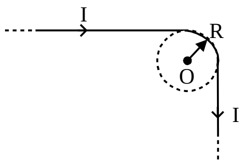
תשובה

זהו למעשה מקרה פרטי של הסעיף הקודם. $\theta_1 = 0$ ואילו $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$. נקבל: $\vec{B}(r) = \frac{I}{cr}$.

<u>מספר פיתוחים שימושיים:</u>

B של טבעת: $\frac{2\pi \text{I}}{cr}$	B של תיל אינסופי: $\frac{2\text{I}}{cr}$
B של חצי טבעת: $\frac{\pi \text{I}}{cr}$	B של תיל חצי אינסופי: $\frac{\text{I}}{cr}$
B של רבע טבעת: $\frac{\pi \text{I}}{2cr}$	

<u>שאלה 4</u>



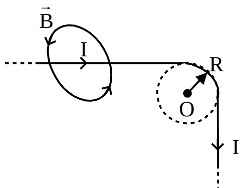
תייל אינסופי מכופף כמתואר בציור, נושא זרם I.
חשב את השדה המגנטי בנקודה O.

תשובה

נשים לב שהבעיה מורכבת למעשה משני תיילים חצי אינסופיים ומרבע טבעת.
נבצע סופרפוזיציה של השדות שלהם, ונקבל כי השדה הכולל בנקודה O הינו:

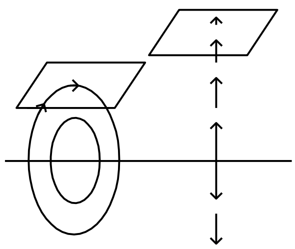
$$B = \frac{\text{I}}{c \cdot R} \cdot \left(1 + 1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{I}}{c \cdot R} \cdot \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

וכיוונו - אל תוך הדף.



כיצד מחליטים על הכיוון? לפי כלל יד ימין. נזכור כי השדה המגנטי הוא מעגלי. אם הנקודה O הייתה מעל התיל האנכי, השדה שהוא היה תורם, כפי שניתן לראות היה כלפי חוץ. מכיוון שאנו מתחת התיל, הזרם כלפי פנים. כאשר באים לחשב את הכיוון, חשוב לשים לב לכיוונו של השדה המגנטי.

מה הכוונה בכך שהשדה המגנטי הוא שדה מעגלי? הרי ניתן להגיד - ידוע כי שדה חשמלי של תיל אינסופי הינו $E(r) = \frac{2\lambda}{r}$. כמו כן, ידוע כי שדה מגנטי של תיל אינסופי הינו $\frac{2I}{rc}$. אולם - שדות אלו מתנהגים בצורה שונה לחלוטין.



ניקח מלבן מעל התיל כמו בציור. השטף של השדה החשמלי יהיה שונה מ-0, ואילו זה של השדה המגנטי יהיה שווה אפס.

הרצאה 18 – שדה מגנטי של טורוס, אי הרציפות של השדה המגנטי במעבר שכבה דקה

שדה מגנטי של טורוס – המשך

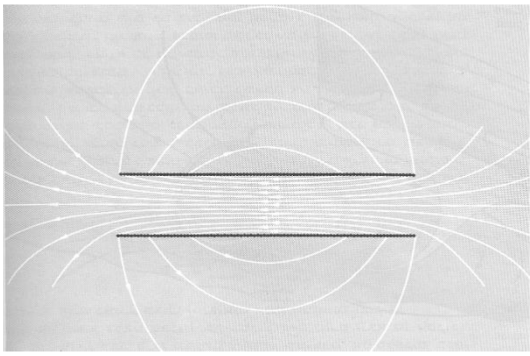
נביט בטורוס, במקרה הגבולי בו $r \to \infty$ $\left(a,b \to \infty\right)$, וכן כאשר $N \to \infty$.

מתקיים $\frac{N}{2\pi r} \to n$. במקרה זה, אנו למעשה הופכים את הטורוס לסליל ישר אינסופי.

ראינו כי $B(r) = \frac{2NI}{cr} = \frac{4\pi I}{C} \cdot \frac{N}{2\pi r}$, ולכן בגבול מתקיים כי $B(r) \to \frac{4\pi nI}{c}$. זהו השדה שנוצר בתוך סליל ישר אינסופי.

מסקנה

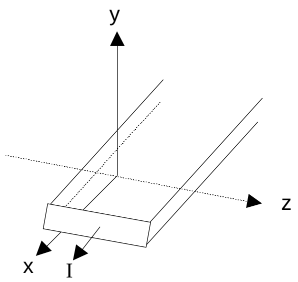
$\vec{B}$ אחיד על שטח החתך של סליל ישר אינסופי (לאורך ציר הסימטריה).



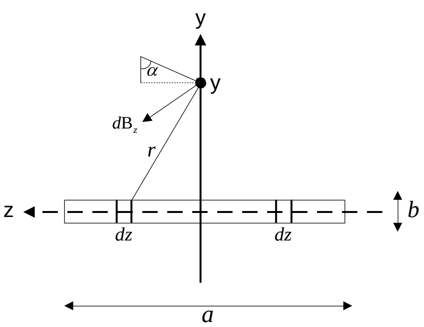
אי הרציפות של השדה המגנטי במעבר דרך שכבה דקה נושאת זרם

דוגמא

נתון מוליך ישר ארוך מאוד נושא זרם I.



נחלק את המוליך למספר רב של חתכים מלבניים – רצועות.



ברצועה שעובייה dz זורם זרם $d\mathrm{I}$.

מתקיים: $d\mathrm{I} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{a}} dz$.

$$dB(r) = \frac{2d\mathrm{I}}{cr} = \frac{2\mathrm{I}}{ca} \cdot \frac{dz}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

נשים לב שהרכיבים משני צידי ציר הסימטריה y מצמצמים זה את זה, ולכן נישאר עם שדה רק בכיוון z.

$$dB_z(r) = dB(r)\sin\alpha = \frac{2\mathrm{I}}{ca}\cdot\frac{dz}{\left(z^2+y^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{y}{\left(z^2+y^2\right)^{1/2}} = \frac{2\mathrm{I}}{ca}\cdot\frac{ydz}{z^2+y^2}$$

$$B_z(y) = \frac{2\mathrm{I}}{ca}\cdot\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{ydz}{z^2+y^2} = ... = \boxed{B_z(y) = \frac{2\mathrm{I}}{ca}\cdot 2\cdot arctg\left(\frac{a}{2y}\right)}$$

<u>מקרה גבולי 1</u> - $y \gg a$

$$B_z(y) = \frac{2\mathrm{I}}{ca} \cdot 2 \cdot arctg\left(\frac{a}{2y}\right) \xrightarrow{\frac{a}{2y} \to 0} \frac{2\mathrm{I}}{ca} \cdot 2 \cdot \frac{a}{2y} = \frac{2\mathrm{I}}{cy}$$

קיבלנו שדה של תיל ישר – מכאן - מרחוק הרצועה נראית כמו תיל.

<u>מקרה גבולי 2</u> - $y \ll a$

$$B_z(y) = \frac{2\mathrm{I}}{ca} \cdot 2 \cdot arctg\left(\frac{a}{2y}\right) \xrightarrow{\frac{a}{2y} \to \infty} \frac{2\mathrm{I}}{ca} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$B_z^+(y) = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{I}}{a} \qquad B_z^-(y) = -\frac{2\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{I}}{a}$$

קיבלנו אי רציפות ברכיב המקביל של $\vec{\mathrm{B}}$ במעבר דרך שכבה דקה: $\boxed{\Delta \mathrm{B}_{\parallel} = \mathrm{B}_{\parallel}^+ - \mathrm{B}_{\parallel}^- = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{I}}{a}}$.

כמו כן:

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{I} = J \cdot A = J \cdot ab \\ j = \frac{I}{a} = J \cdot b \end{gathered}}$$

j היא צפיפות הזרם המשטחית.

$$[j] = \begin{cases} \dfrac{esu}{\sec \cdot cm} & CGS \\ \dfrac{Amp}{m} & SI \end{cases}$$

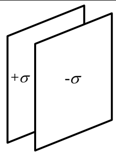
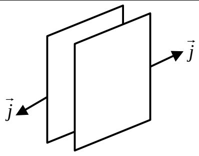
<u>מקרה מיוחד</u>

הזרם נובע ממטען אלקטרוסטטי והמטען מוסע במהירות v במשך הזמן dt.

כמות המטענים בעובי vdt : $dq = \sigma avdt$. כמו כן, $\mathrm{I} = \frac{dq}{dt} = \sigma va$, ומכאן: $j = \sigma v$.

צפיפות מטען משטחי נעה נותנת לנו צפיפות זרם משטחית, ובניסוח נוסף: התפלגות מטען משטחית σ הנעה במהירות v יוצרת התפלגות זרם משטחית $j = \sigma v$.

<u>המשך האנלוגיה בין תכונות שדה חשמלי אלקטרוסטטי לבין תכונות שדה מגנטי בלתי תלוי בזמן</u>

שדה חשמלי $\vec{\mathrm{E}}$	**שדה מגנטי** $\vec{\mathrm{B}}$
 בין הטבלאות: $\mathrm{E}_{\perp}=4\pi\sigma$. מחוץ לטבלאות: E=0 . בין הטבלאות כוח משיכה ליחידת שטח: $\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{1}{2}\sigma\mathrm{E}=2\pi\sigma^{2}$. צפיפות האנרגיה החשמלית: $\frac{dU}{d\tau}=\frac{1}{8\pi}\mathrm{E}^{2}$	 בין הטבלאות: $\mathrm{B}_{\parallel}=\frac{4\pi}{c}\cdot j$. מחוץ לטבלאות $\mathrm{B}=0$. בין הטבלאות כוח דחיה ליחידת שטח: $\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{1}{2c}\cdot j\mathrm{B}$ צפיפות האנרגיה המגנטית: $\frac{dU_m}{d\tau}=\frac{1}{8\pi}\mathrm{B}^{2}$

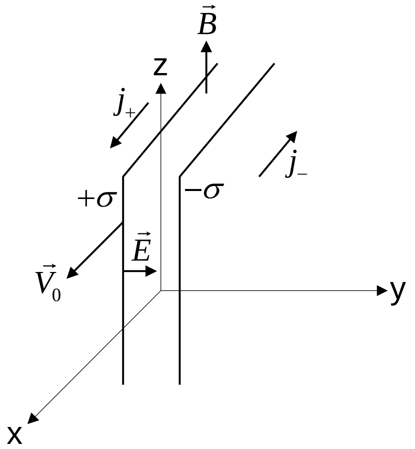
הערה: ניתן לקבל את כיוון הכוח הדוחה / מושך בין הטבלאות על ידי התייחסות אל הטבלאות כאל אוסף של תילים אינסופים, וביצוע סופרפוזיציה של הכוחות שהם מפעילים אחד על השני.

מדוע השדה המגנטי מחוץ ללוחות הוא 0? חוק אמפר אומר כי $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{L}=\frac{4\pi}{c}J_{in}$.
התפלגות המטענים בכל מסלול סגור המקיף את שני הטבלאות היא אפס, ולכן גם השדה המגנטי.

הרצאה 19 – טרנספורמציית לורנץ והשדה האלקטרומגנטי

טרנספורמציית לורנץ של $\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ (השדה האלקטרו מגנטי)

מקרה 1:



מקור השדה: 2 טבלות מישוריות, מקבילות ואינסופיות הטעונות $+\sigma,-\sigma$ ומוסעות במהירות קבועה $V_0\hat{x}$ במערכת המעבדה S.

מערכת S' נעה ביחס למערכת S במהירות $\vec{V}=V\cdot\hat{x}$

<u>במערכת S:</u>

בתחום בין הטבלאות: $B_z=\frac{4\pi}{c}\sigma V_0$ $\quad \vec{B}=B_z\hat{z}$ $\quad E_y=4\pi\sigma$ $\quad \vec{E}=E_y\cdot\hat{y}$

בתחום מחוץ לטבלאות, מתקיים כי $\vec{E}=0,\vec{B}=0$. כמו כן, $j_+=\sigma V_0\hat{x},\ j_-=-\sigma V_0\hat{x}$.

<u>במערכת 'S:</u>

ראשית נראה כיצד משתנות המהירויות והצפיפויות במעבר למערכת S' :

$$\vec{V}_0'=\frac{V_0-V}{1-\frac{V_0V}{c^2}}\hat{x}=\frac{V_0-V}{1-\beta_0\beta}\hat{x}' \qquad \beta_0'=\frac{V_0'}{c} \qquad \gamma_0'=\gamma\gamma_0\left(1-\beta\beta_0\right)$$

$$\sigma'=\left(\frac{\sigma}{\gamma_0}\right)\gamma_0'=\gamma\left(1-\beta\beta_0\right)\sigma \qquad j'=\sigma'V_0'=\gamma\left(1-\beta\beta_0\right)\sigma\cdot\frac{V_0-V}{1-\beta_0\beta}=\gamma\sigma\left(V_0-V\right)$$

כעת נביט כיצד משתנים השדות:

$$\vec{E}'=E_y'\hat{y}$$

$$E_y'=4\pi\sigma'=\gamma\left(4\pi\sigma-\beta\cdot\frac{4\pi\sigma\cdot V_0}{c}\right)$$

$$\boxed{E_y'=\gamma\left(E_y-\beta B_z\right)}$$

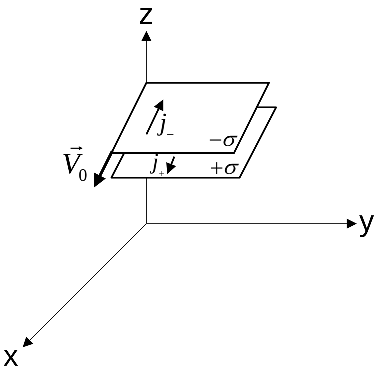
$$B'=B_z'\hat{z}$$

$$B_z'=\frac{4\pi}{c}\sigma'V_0'=\frac{4\pi}{c}\gamma\sigma\left(V_0-V\right)=\gamma\left(\frac{4\pi}{c}\sigma V_0-\beta 4\pi\sigma\right)$$

$$\boxed{B_z'=\gamma\left(B_z-\beta E_y\right)}$$

נשים לב לעובדה כי גם השדה החשמלי וגם השדה המגנטי ב- S' מערבים את השדה החשמלי וגם את המגנטי שהיו במערכת S.

מקרה 2:



נסובב כעת את הטבלאות ב- $90°$.
נחשב כעת את השדות במערכות השונות.

במערכת S:

$$\vec{E} = E_z\hat{z} \qquad E_z = 4\pi\sigma$$

$$\vec{B} = B_y\hat{y} \qquad B_y = -\frac{4\pi}{c}\sigma V_0$$

במערכת S' :

$$E' = E'_z\hat{z}$$

$$E'_z = 4\pi\sigma' = \sigma\left(4\pi\sigma - \beta\frac{4\pi\sigma V_0}{c}\right)$$

$$\boxed{E'_z = \gamma\left(E_z + \beta B_y\right)}$$

$$\vec{B}' = B'_y\hat{y}$$

$$B'_y = -\gamma\left(\frac{4\pi}{c}\sigma V_0 - \beta\cdot 4\pi\sigma\right)$$

$$\boxed{B'_y = \gamma\left(B_y + \beta E_z\right)}$$

סיכום

טרנספורמצית הרכיבים של $\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ בכיוונים ניצבים לכיוון המהירות:

$$\boxed{\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma\left(E_y - \beta B_z\right) & E'_z = \gamma\left(E_z + \beta B_y\right) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \beta E_z\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \beta E_y\right) \end{array}}$$

הכללת התוצאה

נכליל כעת את התוצאה שקיבלנו כאן לנוסחאות שאינן תלויות בבחירת מערכת הצירים.

$$E_{\parallel} \parallel \vec{V} \qquad E_{\perp} \perp \vec{V} \qquad B_{\parallel} \parallel \vec{V} \qquad B_{\perp} \perp \vec{V}$$

<u>דוגמא</u>

$$E'_y = \gamma\left(E_y - \beta B_z\right) = \gamma\left(E_y + \frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]_y\right)$$

$\vec{V}$ הוא בכיוון $\hat{x}$. $\vec{B}$ הוא בכיוון $\hat{z}$. כאשר אנו רוצים את הרכיב של השדה בכיוון $\hat{y}$ המכפלה היא למעשה מכפלה אנטי ציקלית, ולכן המינוס במשוואה הראשונה נהפך לפלוס במשוואה השניה.

משיקולים דומים, נגיע לכך ש: $E'_z = \gamma\left(E_z + \frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]_z\right)$.

במילים אחרות, נוכל לכתוב כי $E'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\right)_{\perp}$. קיבלנו הכללה לנוסחה אותה הצגנו קודם.

בצורה דומה ניתן להכליל את כל המשוואות. נציג כאן את התוצאה הסופית:

$$\boxed{\begin{array}{ll} E'_{\parallel}=E_{\parallel} & B'_{\parallel}=B_{\parallel} \\ E'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\right)_{\perp} & B'_{\perp}=\gamma\left(\vec{B}-\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{E}\right]\right)_{\perp} \end{array}}$$

אלו נוסחאות טרנספורמצית השדה המגנטי.

<u>אינווריאנטיות</u>

1. $E^2-B^2=E'^2-B'^2$.
2. $\vec{E}\cdot\vec{B}=\vec{E}'\cdot\vec{B}'$.

הכוח הפועל על מטען q, כוח לורנץ $\vec{F}=q\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\right)$, נכון בכל מערכת ייחוס.

במעבור בין מערכות - השדות משתנים לפי נוסחאות הטרנספורמציה.

<u>מקרים פרטיים חשובים</u>

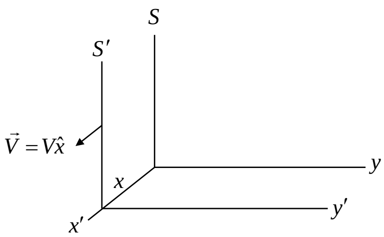
מקרה א'

במערכת S, $\vec{B}\equiv 0$, אולם - $\vec{E}=\left(E_{\parallel},E_{\perp}\right)\neq 0$.

אנו למעשה במקרה זה באלקטרוסטטיקה - אם המטענים במנוחה, לא יווצר שדה מגנטי.

במערכת S' :

$$E'_{\parallel}=E_{\parallel}$$
$$E'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\right)_{\perp}=\gamma E_{\perp}$$
$$B'_{\parallel}=0$$
$$B'_{\perp}=\gamma\left(\vec{B}-\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{E}\right]\right)_{\perp}=-\gamma\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{E}\right]_{\perp}$$



במערכת S' המהירות היחסותית: $\vec{V}'=-\vec{V}$. נוכל להמשיך לפתח את נוסחת הטרנספורמציה עבור השדה המגנטי בצורה הבאה:

$$B'_{\perp}=-\gamma\frac{1}{c}\left[\vec{V}\times\vec{E}\right]_{\perp}=\frac{1}{c}\left[\left(-\vec{V}\right)\times\gamma\vec{E}\right]_{\perp}=\frac{1}{c}\left[\vec{V}'\times\vec{E}'\right]_{\perp}$$

מקרה ב'

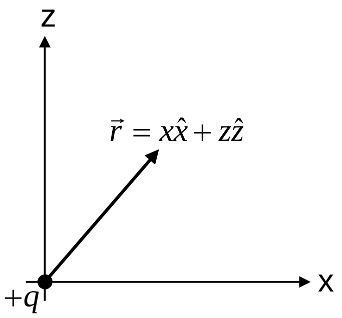
במערכת S, $\vec{E}\equiv 0$ ואילו $\vec{B}=\left(B_{\parallel},B_{\perp}\right)\neq 0$.

במערכת S' :

$$B'_{\parallel}=B_{\parallel}\qquad B'_{\perp}=\gamma B_{\perp}$$
$$E'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\cdot\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]\right)_{\perp}=-\frac{1}{c}\left[\vec{V}'\times\vec{B}'\right]_{\perp}$$

קיבלנו נוסחה סימטרית לחלוטין לנוסחה עבור השדה המגנטי פרט לסימן.

דוגמא - קבלת השדה המגנטי שיוצר מטען נקודה הנע במהירות קבועה



נקבל כעת את השדה המגנטי $\vec{B}$ שיוצר מטען נקודתי $+q$ הנע במהירות קבועה V.
את השדה החשמלי של מטען נקודתי כזה אנו יודע לחשב.
במערכת S, המטען q במנוחה:

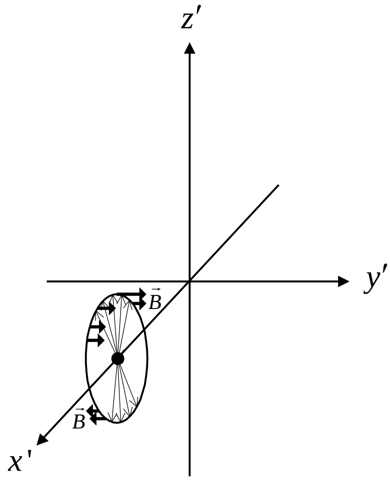
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

מערכת S' נעה ביחס למערכת S במהירות $\vec{V} = V\hat{x}$. ב- S' , q נע במהירות $\vec{V}' = -V\hat{x}$.
טרנספורמצית המאורעות המתאימה: $x = \gamma\left(x' + vt\right),\ y = y',\ z = z'$.
נביט במערכת S' , בשדה על מישור xz:

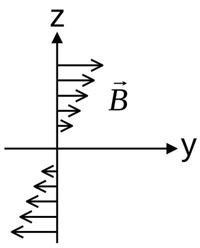
$$E'_z(x',z',t') = \frac{\gamma q z'}{\left[\gamma^2\left(x'+vt'\right)^2 + z'^2\right]^{3/2}} \qquad E'_x(x',z',t') = \frac{\gamma q\left(x'+vt'\right)}{\left[\gamma^2\left(x'+vt'\right)^2 + z'^2\right]^{3/2}}$$

מופיע שדה מגנטי <u>רק</u> בכיוון $\hat{y}$.

$$B'_\perp = B'_y = -\frac{1}{c}\left[-\vec{V}\cdot\vec{E}_z\right] = \frac{1}{c}\left[\frac{\vec{V}\cdot\gamma q z'}{\left[\gamma^2\left(x'+vt'\right)^2 + z'^2\right]^{3/2}}\right] = \frac{\beta\cdot\gamma\cdot q\cdot z'}{\left[\gamma^2\left(x'+vt'\right)^2 + z'^2\right]^{3/2}}$$



השדה המגנטי לאורך ציר התנועה הוא 0.



תרגול 9

שאלה 1

נתון משטח מוליך אינסופי בעובי 2d המקביל למישור xz (מרכז המשטח במישור y=0).

המשטח נושא זרם בצפיפות $\vec{J} = J_0 \frac{y^2}{d^2}\hat{x}$. חשבו את השדה המגנטי כפונקציה של y, שהוא המרחק ממרכז המשטח.

תשובה

מהסימטריה של הבעיה, ומהסתכלות על המשטח המוליך בתור אוסף יריעות זרם, ניתן לראות כי השדה המגנטי הוא בכיוון $\hat{z}$ בלבד, וכמו כן הוא איננו תלוי ב-x או ב-z.

תזכורת: נתונה יריעת זרם במישור xz עם צפיפות זרם משטחית $\vec{J} = J\hat{x}$ ללא שדה חיצוני. השדה המגנטי של הרצועה הוא $B = \frac{2\pi}{c} j$, וכיוונו כלפי $\hat{z}$ או $-\hat{z}$ (משתנה לפי הצד של היריעה בו אנו נמצאים, ונקבע בעזרת כלל יד ימין).

מכאן שבבעיה הנתונה השדה הוא רק בכיוון $\hat{z}$.

חוק אמפר: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c}\cdot\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$. ניקח מסלול מלבני עם צלע l בכיוון $\hat{z}$ וצלע בגודל $2y$ בכיוון $\hat{y}$. מרכז המלבן במישון $y=0$. כמו כן, נבחר y כך ש- $|y|<d$. לפי אי הרציפות של השדה המגנטי במעבר דרך יריעת זרם, מתקיים כי

$$l\cdot B(-y) - l\cdot B(y) = \frac{4\pi}{c}\int_{-l/2}^{l/2} dz \int_{-y}^{y} dy J_0 \frac{y^2}{d^2} = \frac{4\pi}{c} l\cdot\frac{J_0}{d^2}\cdot\left(\frac{y^3}{3} - \left(-\frac{y^3}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow B(-y) - B(y) = \frac{8\pi}{c}\cdot\frac{J_0}{d^2}\cdot\frac{y^3}{3}$$

נסכם: עבור $|y|<d$, מתקיים כי:

$$\boxed{\vec{B}(y) = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}\cdot J_0\cdot\frac{y^3}{3d^2}\hat{z} & 0<y<d \\ -\frac{4\pi}{c}\cdot J_0\cdot\frac{y^3}{3d^2}\hat{z} & -d<y<0 \end{cases}}$$

עבור $|y|>d$, מתקיים $\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}$:

$$l\cdot B(-y) - l\cdot B(y) = \frac{4\pi}{c} J_0 \int_{-d}^{d} dy \frac{y^2}{d^2} = \frac{4\pi}{c} J_0\cdot l\cdot\frac{1}{d^2}\left(\frac{d^3}{3} - \left(-\frac{d^3}{3}\right)\right)$$

ומכאן: עבור $|y|>d$,

$$\boxed{B(y) = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} J_0\cdot\frac{d}{3}\hat{z} & |y|>d \\ -\frac{4\pi}{c} J_0\cdot\frac{d}{3}\hat{z} & |y|<d \end{cases}}$$

שאלה 2

הראו כי הביטויים $\vec{E}\cdot\vec{B}$ ו- $\vec{E}^2-\vec{B}^2$ הם אינווריאנטים תחת טרנספורמצית השדות ממערכת S למערכת S' הנעה במהירות $\vec{V}=V\hat{x}$ ביחס אליה.

תשובה

טרנספורמציית השדות:

$$E_x'=E_x \qquad E_y'=\gamma\left(E_y-\beta B_z\right) \qquad E_z'=\gamma\left(E_z+\beta B_y\right)$$
$$B_x'=B_x \qquad B_y'=\gamma\left(B_y+\beta E_z\right) \qquad B_z'=\gamma\left(B_z-\beta E_y\right)$$

כעת נראה כי הביטויים הינם אינווריאנטים:

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}'=E_xB_x+\gamma^2\left(E_yB_y+\beta B_yB_z+\beta E_yE_z-\beta^2E_zB_z+E_zB_z+\beta B_yE_z-\beta E_yE_z-\beta^2E_yB_y\right)=$$
$$=E_xB_x+\gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left(E_yB_y+E_zB_z\right)=\vec{E}\cdot\vec{B}$$

באופן דומה:

$$E'^2-B'^2=E_x^2+\gamma^2\left(E_y^2-2\beta E_yB_z+\beta^2B_z^2+E_z^2+2\beta B_yE_z+\beta^2B_y^2\right)$$
$$-B_x^2-\gamma^2\left(B_y^2+2\beta B_yE_z+\beta^2E_z^2+B_z^2+2\beta B_zE_y+\beta^2E_y^2\right)$$
$$=E_x^2-B_x^2+\gamma^2\left[\left(E_y^2-\beta^2E_y^2\right)+\left(E_z^2-\beta^2E_z^2\right)-\left(b_y^2-\beta^2B_y^2\right)-\left(B_z^2-\beta^2B_z^2\right)\right]$$
$$=E_x^2+E_y^2+E_z^2-\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)=E^2-B^2$$

שאלה 3

במערכת S נתונים השדות $\vec{E}=E_0\hat{y},\vec{B}=B_0\hat{x}$.

א. האם קיימת מערכת שבה השדה החשמלי והמגנטי באותו הכיוון?

ב. האם קיימת מערכת שבה $\vec{E}=0$?

תשובה א'

לא קיימת מערכת כזו.

במערכת S מתקיים $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$. זהו אינוריאנט יחסותי. אם קיימת מערכת בה $\vec{E}\parallel\vec{B}$ אז מתקיים בה גם כי $\vec{E}\cdot\vec{B}\neq 0$ ולכן לא קיימת מערכת כזו.

תשובה ב'

נביט במערכת הנעה במהירות $\vec{V}=\beta c\hat{z}$.

$$\vec{E}'=\gamma\left(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}\right)=\gamma\left(E\hat{y}+\beta\hat{z}\times B_0\hat{x}\right)=\gamma\left(\vec{E}+\beta B_0\hat{y}\right)$$

ומכאן: אם $\beta=-\dfrac{E_0}{B_0}$ אז נקבל $\vec{E}'=0$, כלומר מהירות המערכת היא $\vec{V}=\dfrac{E_0}{B_0}\cdot c\cdot\left(-\hat{z}\right)$.

שאלות

שאלה 1

אלקטרון נמצא במנוחה בראשית הצירים של מערכת S. חשבו את השדות החשמלי והמגנטי במערכת S' במישור $x'z'$ בזמן התלכדות הראשית של המערכות, ברגע $t'=0$, כאשר נתון כי S' נעה במהירות $\vec{V}=\frac{3}{5}c\hat{x}$ ביחס ל-S.

תשובה 1

במערכת S האלקטרון במנוחה, ולכן במערכת S השדה המגנטי הוא אפס, וקיים רק שדה חשמלי (אלקטרוסטטיקה).

$$\vec{B}=0$$

$$\vec{E}=q\frac{\hat{r}}{r^2}=q\frac{x\hat{x}+z\hat{z}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

נבצע את טרנספורמצית השדות, ונמצא את השדה החשמלי והמגנטי במערכת S' .

$$E_x=E'_x=q\frac{x\hat{x}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y=E'_y=0$$

$$E'_z=\gamma E_z=\gamma q\frac{z\hat{z}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot q\frac{z\hat{z}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{5}{4}\cdot q\frac{z\hat{z}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}'=q\frac{x\hat{x}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}+\frac{5}{4}\cdot q\frac{z\hat{z}}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{q}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\left(x\hat{x}+\frac{5}{4}z\hat{z}\right)$$

$$x'=\gamma x\Rightarrow\boxed{\vec{E}'=\frac{5}{4}\frac{q}{\left(\left(5x'/4\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}\cdot\left(x'\hat{x}+z'\hat{z}\right)}$$

$$B'_x=B_x=0$$

$$B'_y=\gamma\left(B_y+\beta E_z\right)=\gamma\beta E_z=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot q\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{y}=\frac{3}{4}\cdot q\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{y}$$

$$B'_z=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{B}=\frac{3}{4}\cdot q\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{y}=\frac{3}{4}\cdot q\frac{z}{\left(\left(5x'/4\right)^2+z'^2\right)^{3/2}}\hat{y}}$$

<u>שאלה 2</u>

נתון כי במערכת המעבדה S השדה החשמלי הוא אפס. איזה מהמשפטים הבאים מתקיים בכל מערכת אינרציאלית S' הנעה במהירות קבועה ביחס ל-S?

1. השדה המגנטי מתאפס במערכת S' .
2. השדה החשמלי שווה בערכו המוחלט לשדה המגנטי במערכת S' .
3. השדה החשמלי מתאפס במערכת S' .
4. השדה החשמלי והמגנטי במערכת S' ניצבים זה לזה.

<u>תשובה 2</u>

במערכת S, מתקיים כי $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$. גודל זה הוא אינווריאנט יחסותי, ולכן ייתקיים גם עבור כל S' הנעה במהירות קבועה ביחס ל-S, כי $\vec{E}'\cdot\vec{B}'=0$. מכפלה סקלרית היא אפס כאשר הווקטורים במכפלה ניצבים ולכן השדות ניצבים זה לזה, ותשובה 4 היא הנכונה.

<u>שאלה 3</u>

נתון שבמערכת S מתקיים $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$. מה צריכה להיות מהירות המערכת S' , $\vec{V}$, ביחס ל-S, כדי שהשדה החשמלי במערכת S' יתאפס?

<u>תשובה 3</u>

לפי הנתון, השדה החשמלי והשדה המגנטי ניצבים.
בלי הגבלת הכלליות, נבחר $\vec{V}=V_x\hat{x},\ \vec{E}=E_y\hat{y},\ \vec{B}=B_z\hat{z}$. נדרוש: $\vec{E}'=0$. לפי נוסחת הטרנספורמציה של שדות מתקיים: $\vec{E}'=\gamma\left(E_y-\frac{V}{c}B_z\right)\hat{y}$ ומכאן: $V=c\cdot\frac{E_y}{B_z}$.

הרצאה 20 – השראה אלקטרומגנטית, חוק פארדיי, חוק לנץ

השראה אלקטרומגנטית

הקדמה

ראינו כי $\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ הם חלקים של אותו גודל פיסיקלי. מבחינה היסטורית, הקשר בין $\vec{E}$ ל- $\vec{B}$ נמדד לראשונה על ידי פארדיי, כאשר עשה ניסויים בהם הזיז סלילים שזרם בהם זרם חשמלי, וראה שכתוצאה מכך הושרה זרם במעגלים בהם לא זרם זרם. תופעה זו מכונה כיום בשם השראה אלקטרומגנטית.
כמו כן, פארדיי גילה כי שינוי בשטף המגנטי גורם לשינוי בכוח האלקטרו-מניע.

חוק פארדיי

יהיה שדה מגנטי משתנה בזמן $\vec{B}(\vec{r},t)$, ותהי לולאה מוליכה C המהווה שפה של משטח פתוח S.

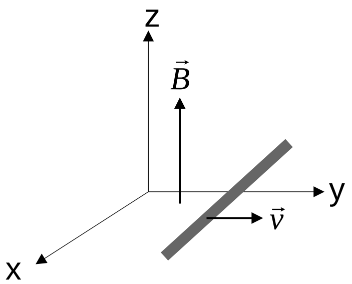
כמו כן, שטף השדה המגנטי הינו $\Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$. מתקיים: $\boxed{\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}}$

חוק פארדיי בצורה אינטגרלית: $\boxed{\int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}}$

הוכחת חוק פארדיי

ניתן לקבל את חוק פארדיי כתוצאה מהכוח הפועל על מטען נע בשדה מגנטי.
נוכיח את החוק עבור מקרה פשוט, ונסיק לגבי הכלל.

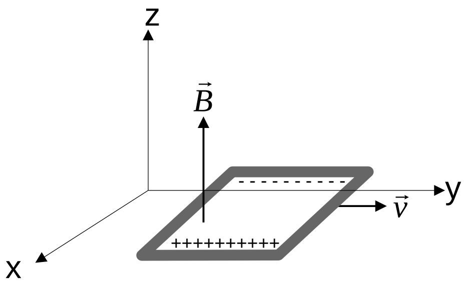
א. מוט מוליך הנע בשדה מגנטי אחיד



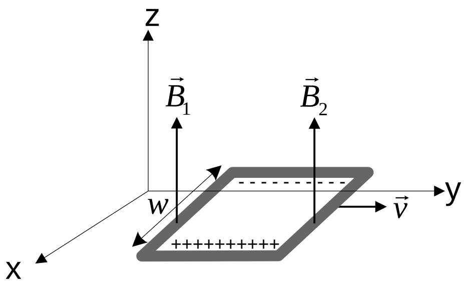
מוט מוליך דק נע במהירות קבועה v, בכיוון הניצב לאורכו.
במערכת בה המוט נע, S, ישנו במרחב שדה מגנטי אחיד $\vec{B}$ בכיוון $\hat{z}$, ושדה חשמלי 0 (בהעדר המוט).
המוט מוליך ולכן הוא מכיל חלקיקים טעונים.
כל חלקיק טעון q שנע עם המוט נע בשדה המגנטי $\vec{B}$ ועל כן פועל עליו כוח $\vec{F} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$. מהשרטוט ניתן לראות כי כיוון הכוח הוא בכיוון החיובי של ציר x. כאשר המערכת במצב יציב, והמוט
נע בתנועה קצובה, הכוח $\vec{F}$ מאוזן על ידי כוח שווה בגודלו והפוך בכיוונו. מקור כוח זה הוא השדה החשמלי בתוך המוט. מכאן, השדה החשמלי בכל נקודה בתור המוט הוא $q\vec{E} = -\vec{F}$.
כעת נביט במערכת S', שנעה ביחד עם המוט. במערכת S' שדה מגנטי $\vec{B}'$ ושדה חשמלי אחיד, שמתקבל על ידי $E' = \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}'$. כאשר אנו מכניסים למערכת זו את המוט, אנו למעשה מציבים מוט מוליך נייח בשדה חשמלי אחיד. התפלגות המטען על פני המוט תשתנה באופן כזה, שהשדה בתוכו יהיה אפס.
במקרה זה, כאשר המוט נח, השדה המגנטי $\vec{B}'$ איננו משפיע על התפלגות המטענים במוט.

עבור צופה במערכת S, בתוך המוט נוצר שדה חשמלי $\vec{E}=-\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$, המאזן בדיוק את הכוח המגנטי שמפעיל השדה המגנטי על כל מטען q הנע עם המוט. שדה זה הינו **השדה החשמלי המושרה** על ידי השדה המגנטי.

ב. מסגרת מוליכה הנעה בשדה מגנטי לא אחיד



מה יקרה במקרה הבא: מסגרת תיל מלבנית נעה במהירות קבועה $\vec{v}$ בשדה אחיד $\vec{B}$.
במקרה זה, בצלעות נגדיות של המלבן יצטבר מטען מסויים, אך פרט לכך לא יקרה דבר. לפיכך, המקרה בו נעסוק יהיה מקרה של שדה קבוע אך לא אחיד במרחב. בכל נקודה במרחב גודל וכיוון השדה יהיו שונים.
במערכת S המסגרת נעה במהירות $\vec{v}=v\hat{y}$.



נניח כי ברגע מסוים t, עוצמת השדה המגנטי בצד השמאלי של המסגרת הוא B_1 ובצד הימני של המסגרת B_2. נסמן ב- $\vec{F}$ את הכוח הפועל על מטען q שנע עם המסגרת. הכוח הינו פונקציה של מיקום המטען על המסגרת (מכיוון שהשדה המגנטי תלוי במיקום במרחב).

נרצה כעת לחשב את האינטגרל הקווי של $\vec{F}$ סביב כל המסגרת. צלעות המסגרת המקבילות לכיוון התנועה אינן תורמות לאינטגרל.

נחשב לכן את האינטגרל על שתי הצלעות האחרות: $\int\vec{F}\cdot d\vec{s}=\frac{qv}{c}\left(B_1-B_2\right)w$.

נניח כי מטען q משלים הקפה אחת סבב המסגרת במשך זמן קצר, כך שמקומה של המסגרת אינו משתנה תוך כדי ההקפה במידה ניכרת. במצב זה, המשוואה מתארת את העבודה שמבצע הכוח $\vec{F}$ בהסיעו את המטען q פעם אחת סביב אותה מסגרת. העבודה שמבצע כוח $\vec{F}$, ליחידת מטען, היא $\frac{1}{q}\int\vec{F}\cdot d\vec{s}$.

לגודל זה אנו קוראים **כוח אלקטרומניע** - כא"מ. סימונו של הכא"מ: ε. לכא"מ אותם הממדים כמו של הפוטנציאל החשמלי. במקרה שלנו נקבל: $\boxed{\varepsilon=\frac{vw}{c}\left(B_1-B_2\right)}$

נגדיר את הכא"מ כעבודה ליחידת מטען, הכרוכה בהסעת מטען סביב מעגל חשמלי. אם המעגל הינו מעגל חשמלי ממשי, שיש לו התנגדות R, אזי הכא"מ ε יגרום לזרם במעגל, על פי חוק אום $I=\varepsilon/R$.
הכוח האלקטרומניע קשור לקצב שינוי השטף המגנטי. כזכור, השטף המגנטי הוא אינטגרל המשטחי B על פני המשטח, אשר המסגרת היא השפה שלו. במשך זמן dt המסגרת עוברת מרחק vdt. כתוצאה מכך משתנה השטף דרך המסגרת. בימין נוסף שטף בשיעור B_2wvdt ובשמאל נגרע שטף בשיעור B_1wvdt.
השינוי הכולל בשטף $d\Phi$ במשך הזמן dt הינו: $d\Phi=-\left(B_1-B_2\right)wvdt$.

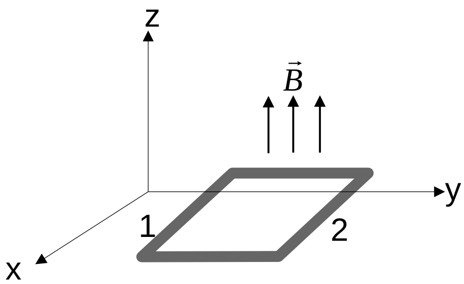
מכאן נקבל את חוק פארדיי: $\boxed{\varepsilon=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}}$.

נזכיר שוב שלמרות שהוכחנו רק מקרה פרטי, החוק נכון באופן כללי.

<u>חוק לנץ</u>

כיוון הזרם המושרה - חוק לנץ: הנטיה של מערכות היא להתנגד לשינויים, כלומר הזרם המושרה יוצר שטף מגנטי השואף לבטל את השינוי המקורי בשטף.
ניסוח נוסף: הזרם המושרה בלולאה נעה יוצר שדה מגנטי במגמה מנוגדת לשינוי בשדה המגנטי המושרה.

<u>דוגמא</u>



לולאה מוליכה מלבנית, בעלת אורכי צלעות L_x, L_y

נעה באיזור בו $\vec{B}(y)=\alpha(y_0-y)\hat{z}$.

המהירות ההתחלתית של הלולאה: $t=0, \vec{V}_0=V_0\cdot\hat{y}$.

נרצה למצוא עבור $t>0$ את $\vec{V}=V(t)\cdot\hat{y}$.

$$\varepsilon=\frac{V(t)\cdot L_x}{c}\left(B_1-B_2\right)=\frac{V(t)\cdot L_x}{c}\cdot\left[\alpha\left(y_0-y_1\right)-\alpha\left(y_0-y_2\right)\right]=\frac{\alpha\cdot L_x}{c}\cdot\underbrace{\left(y_2-y_1\right)}_{L_y}\cdot V(t)$$

$$\varepsilon=\frac{L_xL_y\alpha}{c}\cdot V(t)$$

שטח הלולאה הינו $S=L_xL_y$, ולכן נוכל לבטא את הכא"מ המושרה: $\varepsilon=\frac{\alpha S}{c}\cdot V(t)$. הזרם המושרה

בלולאה הינו: $i(t)=\frac{\varepsilon}{R}$, כאשר R היא התנגדות הלולאה.

תזכורת: נביט בקטע תיל. אורך הקטע הוא $\Delta\vec{l}$. שטח החתך של התיל הוא a , וצפיפות המטענים היא $n=\frac{\text{נים}}{cm^3}$. באלמנט התיל: $n\cdot\Delta J=n\left(\vec{a}\cdot\Delta\vec{l}\right)$.

$$\Delta\vec{F}=n\cdot\left(\vec{a}\cdot\Delta\vec{l}\right)\cdot\frac{q}{c}\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)=\left(nq\vec{V}\cdot\vec{a}\right)\cdot\frac{1}{c}\left[\Delta\vec{l}\times\vec{B}\right]=\left(\vec{J}\cdot\vec{a}\right)\cdot\frac{1}{c}\cdot\left[\Delta\vec{l}\times\vec{B}\right]=\frac{1}{c}\left[I\cdot\Delta\vec{l}\times\vec{B}\right]$$

הכוח על צלע 1:

$$\vec{F}_1=\frac{1}{c}\left[iL_x\hat{x}\times\vec{B}_1\right]=-\frac{1}{c}iL_x\alpha\left(y_0-y_1\right)\hat{y}$$

הכוח על צלע 2:

$$\vec{F}_2=\frac{1}{c}\left[iL_x\left(-\hat{x}\right)\times\vec{B}_2\right]=\frac{1}{c}iL_x\alpha\left(y_0-y_2\right)\hat{y}$$

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=\frac{1}{c}iL_x\alpha\left(y_2-y_1\right)\left(-\hat{y}\right)=\frac{1}{c}i\alpha S\left(-\hat{y}\right)$$

$$\vec{F}(t)=\frac{1}{c}\left(\frac{\alpha S}{cR}V(t)\right)\alpha S\left(-\hat{y}\right)=\left(\frac{\alpha S}{c}\right)^2\frac{V(t)}{R}\left(-\hat{y}\right)$$

מופיע כוח שמנוגד לכיוון התנועה של הלולאה.
נשתמש בחוק השני של ניוטון, על מנת למצוא את המהירות.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}$$

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{mR}\left(\frac{\alpha S}{c}\right)^2V(t)$$

זמן הרלקסציה:

$$\tau=mR\left(\frac{c}{\alpha s}\right)^2\Rightarrow\frac{dV(t)}{dt}=-\frac{V(t)}{\tau}$$

$$V(t)=V_0\exp\left\{\frac{-t}{\tau}\right\}$$

הדרך שתעבור הלולאה מתחילת התנועה עד עצירתה:

$$\Delta y = \int_0^\infty V(t)dt = V_0 \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t'}{\tau}\right\} dt' = V_o t$$

חום ג'ואל שנוצר בלולאה:

$$\frac{dw}{dt} = i^2(t)\cdot R = \left(\frac{\alpha S}{cR}\right)^2 V^2(t)\cdot R \Rightarrow W = R\int_0^\infty \left(\frac{\alpha S}{cR}\right)^2 V_0^{\ 2} \exp\left\{\frac{-2t'}{\tau}\right\} dt'$$

$$W = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha S}{c}\right)^2 V_0^{\ 2}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2}$$

<u>הערות חשובות</u>

- הכוח האלקטרומניע תלוי רק בקצב שינוי שטף השדה המגנטי ולא באף גורם אחר.
- השינוי בערך של $\vec{B}$ בסביבה מסוימת קובע חד ערכית את הרוט של $\vec{E}$, אך אינו קובע את השדה $\vec{E}$ בצורה חד ערכית. כדי למצוא את $\vec{E}$ יש להוסיף בסופרפוזיציה כל שדה אלקטרוסטטי שעבורו $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$.
- השדה החשמלי הנוצר משינוי בשטף המגנטי הינו תמיד ניצב לשדה המגנטי מכיוון ש- $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ הפוך בכיוונו מ- $\vec{B}$ על פי חוק לנץ, וביצוע רוט על ווקטור מאונך לווקטור עצמו, ולכן השדה החשמלי יהיה ניצב ל- $\vec{B}$.

<u>חוק פארדיי - סיכום</u>

יהיה שדה מגנטי משתנה בזמן $\vec{B}(\vec{r},t)$, ותהי לולאה מוליכה C המהווה שפה של משטח פתוח S.
מתקיים:

$$\boxed{\varepsilon = \int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}}$$

כאשר $\Phi = \oint \vec{B}\ d\vec{a}$.

הרצאה 21 – השראות הדדיות, השראות עצמית, המעגל המכיל סליל ונגד, אלגוריתם רוטמן

השראות הדדיות

נתונים שני מעגלי זרם מוליכים C_1, C_2 קבועים בממדים ובמרחק ביניהם. S_2 הוא משטח פתוח ש-C_2 הוא שפתו. במעגל C_1 זורם זרם $I_1(t)$. הזרם יוצר שדה מגנטי באיזור המעגל C_2: $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$.

השטף דרך משטח המוגדר על ידי מעגל C_2 ונובע מ-I_1: $\phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2)\cdot d\vec{a}_2$.

נראה כעת כי השטף ϕ_{21} משתנה ביחס ישר לשינוי ב-I_1.

במעגל C_2 יווצר כוח אלקטרומניע מושרה:

$$\varepsilon_{21} = -\frac{1}{c}\frac{d\phi_{21}(t)}{dt}$$

נרצה להגיע כעת למשוואה חדשה, בה יופיע קבוע שיסומן M_{21}:

$$\boxed{\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}}$$

הקבוע M_{21} נקרא **השראות הדדית**. גודל זה הוא גודל גיאומטרי, הנקבע על ידי הסידור הגיאומטרי של המעגלים.

סימן המינוס הנמצא בהגדרה אינו אומר לנו הרבה על מגמת הכוח האלקטרומניע. אם ברצוננו לדעת באיזו מגמה ישאף הכוח האלקטרומניע להסיע מטענים ב-C_2, נשתמש בחוק לנץ.

<u>טענת עזר</u>

יהי S משטח ותהי C שפת המשטח. דרך משטח זה עובר שדה מגנטי $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$.

נחפש את השטף דרך S, שהמעגל שלנו הוא שפתו.

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

כאשר המעבר האחרון נכון לפי משפט סטוקס.

מסקנה: $\boxed{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}}$

נשתמש כעת בטענת העזר להמשך הפיתוח:

$$\phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2)\cdot d\vec{a}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2)\cdot d\vec{l}_2$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{I_1(t)}{c}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|}$$

$$\phi_{21} = \oint_{C_2}\frac{I_1(t)}{c}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|}\cdot d\vec{l}_2 = \frac{I_1(t)}{c}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|}$$

נשים לב כי הביטוי שבאינטגרל הוא גודל גיאומטרי.

$$\varepsilon_{21}=-\frac{1}{c}\frac{d\phi_{21}(t)}{dt}=-\left(\frac{I_1(t)}{c^2}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\right)\cdot\frac{dI_1}{dt}=-M_{21}\cdot\frac{dI_1}{dt}$$

כעת נביט במצב "הפוך". במעגל C_2 זורם זרם $I_2(t)$ המשרה כא"מ ε_{12}

$$\varepsilon_{12}=-\left(\frac{1}{c^2}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right)\cdot\frac{dI_2}{dt}=-M_{12}\cdot\frac{dI_2}{dt}$$

ניתן לראות כי $M_{12}=M_{21}$ ולכן נסמן: $M_{12}=M_{21}\equiv M$.

<u>מסקנה</u>

נוכל לדבר מעתה על ההשראות ההדדית M של זוג מעגלים נתון, ללא שנצטרך להבחין בין M_{12},M_{21} .

<u>השראות עצמית</u>

כאשר הזרם I_1 משתנה, יש שינוי בשטף דרך המעגל C_1 עצמו. כתוצאה מכך מושרה ב- C_1 כוח אלקטרומניע, אותו נסמן ε_{11}. חוק ההשראה תקף, ללא קשר למקור השטף: $\varepsilon_{11}=-\frac{1}{c}\frac{d\phi_{11}(t)}{dt}$.

ϕ_{11} הוא השטף דרך המעגל C_1 של השדה B_1, הנוצר על ידי הזרם I_1 שבמעגל C_1 עצמו.

ϕ_{11} פרופורציוני ל- I_1, ולכן נרשום: $\varepsilon_{11}=-L_1\frac{dI_1}{dt}$. הקבוע L_1 נקרא **ההשראות העצמית** של המעגל.

נביט כעת במקרה הכללי של שני מעגלים בהם זורמים זרמים $I_1(t),I_2(t)$. נקבל:

$$\varepsilon_1=-L_1\frac{dI_1}{dt}-M\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2=-M\frac{dI_1}{dt}-L_2\frac{dI_2}{dt}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-L_1 & -M\\ -M & -L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dI_1/dt\\ dI_2/dt\end{pmatrix}}$$

<u>יחידות</u>

$$[M]=[L]=\frac{[\varepsilon]}{\left[\frac{dI}{dt}\right]}$$

$$[M]=\begin{cases}\dfrac{esu/m}{esu/\sec^2}=\dfrac{\sec^2}{cm} & C.G.S\\[2ex] \dfrac{volt}{Amp}\cdot\sec=1\cdot Henry & SI\end{cases}$$

$$1\cdot H=\frac{1/300[statvolt]}{3\cdot10^9\left[esu/\sec^2\right]}=\frac{1}{9\cdot10^{11}}\cdot\frac{\sec^2}{cm}$$

הערה

אם מסתכלים על השראה הדדית בין סליל בעל N_1 כריכות לסליל בעל N_2 כריכות התוצאה מוכפלת ב- $N_1 \cdot N_2$, כי יש לנו N_1 כריכות זרם שמשפיעות לא על טבעת בודדת, אלא על N_2 טבעות.

דוגמא א'

נחשב M של מערך של שני סלילים מוליכים ארוכים מאוד, ישרים, מקבילים, האחד בתוך השני.

עבור הסליל החיצוני $B_1 = \frac{4\pi}{c} n_1 I_1$ כאשר n_1 היא צפיפות הכריכות בתיל 1.

מה השטף דרך סליל 2?

על מנת לחשב את השטף ננסה למצוא מהו השטף דרך לולאה אחת שבו. הסליל הפנימי בעל N_2 כריכות שכל אחת מהן ברדיוס b_2. שטח כל כריכה: $a_2 = \pi b_2^2$. שדרך דרך כריכה אחת הוא $\phi'_{21} = B_1 \pi b_2^2$.

השטף הכללי דרך סליל 2:

$$\phi_{21} = \phi'_{21} \cdot N_2 = \frac{4\pi n_1 I_1}{c} N_2 \pi b_2^2 = \frac{4\pi^2 n_1 N_2 b_2^2}{c} I_1(t)$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{1}{c}\frac{d\phi_{21}}{dt} \Rightarrow \boxed{M = \frac{4\pi^2 n_1 N_2 b_2^2}{c} I_1(t)}$$

הערה

כאשר מחשבים את ההשראות ההדדית על שני מעגלים צריך למצוא את המעגל הפשוט יותר. לפעמים מאוד קשה לחשב את ההשראות על אחד מהמעגלים, ולעומת זאת החישוב על המעגל השני הוא פשוט. כמו כן, ראינו שההשראות זהה עבור שני המעגלים, ולכן נוכל להסתפק בחישוב ההשראות עבור אחד מהם, ונדע כי זוהי גם ההשראות של המעגל השני.

דוגמא ב'

נחשב את ההשראות העצמית של טורוס. נניח לצורך הפשטות כי הטורוס הוא בעל חתך מלבני. זורם זרם בטורוס, שהוא משיק למעגל הפנימי. בתחום $a < r < b$, מתקיים כי $B(r) = -\frac{2NI}{cr}$.

השטף של B דרך כריכה אחת יחשוב כך:

$$\phi' = \int \vec{B} d\vec{a} = h\frac{2NI}{c}\int_a^b \frac{dr}{r} = h\frac{2NI}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

השטף דרך כל הכריכות:

$$\phi = N\phi' = \frac{2N^2 Ih}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

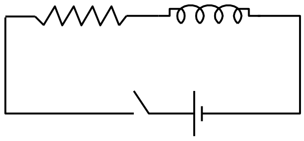
ומכאן:

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{c^2} \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{L = \frac{2N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{c^2}}$$

המעגל המכיל סליל ונגד

מקרה 1



ברגע $t=0$ סוגרים את המפסק וזרם מתחיל לזרום.

$I(0)=0$, וכאשר $t\to\infty$, מתקיים: $I(\infty)=\frac{\varepsilon}{R}$.

אם הזרם I במעגל משתנה בקצב $\frac{dI}{dt}$, מושרה במעגל כוח אלקטרומניע $L\frac{dI}{dt}$. הכא"מ המושרה "שואף" לבטל את השינוי בזרם, ובהתאם לכך כיוונו.

נכתוב את משוואת המעגל ל- $t>0$ (אחרי סגירת המפסק):

$$\varepsilon-L\frac{dI}{dt}=RI$$

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{\varepsilon}{L}$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית ממעלה ראשונה.

דרך נוספת להסתכל על המשוואה היא כזו: $L\frac{dI}{dt}$ זהו המתח על הסליל, ו-RI זהו המתח על הנגד.

אנו אומרים: המתח על הכא"מ נופל על המעגל - חלקו על הנגד וחלקו על הסליל.

פתרון פרטי של המשוואה: $\frac{dI}{dt}=0 \Leftarrow I_0=\frac{\varepsilon}{R}$.

כעת, לאחר שמצאנו פתרון פרטי, נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0$$

$$I_1(t)=\alpha\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

כעת נשתמש במשפט האומר שהפתרון של המשוואה הלא הומוגנית הוא הסכום של הפיתרון של ההומוגנית עם פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית, ונקבל:

$$I(t)=I_1(t)+I_0(T)=\alpha\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)+\frac{\varepsilon}{R}$$

לפי תנאי ההתחלה נקבל כי $\alpha=-\frac{\varepsilon}{R}$, ומכאן:

$$\boxed{I(t)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)}$$

מקרה 2

ב- $t<0$ זורם זרם במעגל. ב $t=0$ - אנו פותחים את המפסק, והזרם מופסק. משוואת המעגל:

$$-L\frac{dI}{dt}=RI$$

פתרון המשוואה:

$$\boxed{I(t)=I_0\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)}$$

במעגל מתפתח על הנגד חום Joule כאשר הזרם דועך.

$$dW=I^2(t)Rdt=I_0^{\,2}\exp\left(\frac{-2R}{L}t\right)Rdt$$

$$W=\int_0^\infty I^2(t)Rdt=I_0^{\,2}R\int_0^\infty\exp\left(\frac{-2R}{L}t\right)dt=\frac{1}{2}LI_0^{\,2}\left[\exp\left(\frac{-2R}{L}\right)\right]_0^\infty=\frac{1}{2}LI_0^{\,2}$$

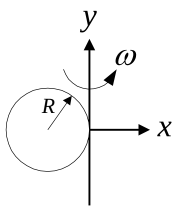
הראנו כי האנרגיה העצורה בסליל שבו זורם זרם I היא $\boxed{U=\frac{1}{2}LI^2}$.

האנרגיה האצורה בשדה מגנטי

האנרגיה U, הקשורה באיזה שדה מגנטי $B(\vec{r})$, נתונה על ידי הנוסחה הבאה: $\boxed{U=\frac{1}{8\pi}\int B^2d\tau}$

שאלות

<u>שאלה 1</u>



טבעת מתכתית בעלת רדיוס R מסתובבת במהירות זוויתית קבועה ω סביב ציר משיק לטבעת. הטבעת כולה נמצאת בתוך שדה מגנטי אחיד $\vec{B}=-B\hat{z}$ (אל תוך הדף). חשבו את הכא"מ המתפתח בטבעת.
בציור מתקיים כי $t=0$.

<u>תשובה 1</u>

שטף השדה המגנטי: $\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}_{eff}$. כיוון ווקטור השטח הוא רק על מישור xz ולא על מישור y , ולכן:

$$\vec{S}_{eff}=S\cos\omega t\hat{z}+S\sin\omega t\hat{x}$$

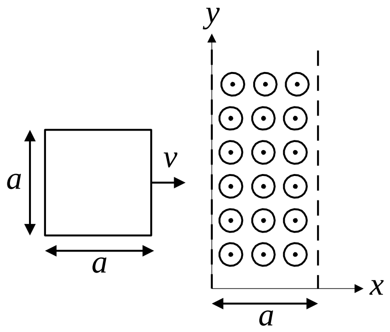
נחשב את שטף השדה המגנטי:

$$\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}_{eff}=\left(-B\hat{z}\right)\cdot A\cos\omega t\hat{z}=-AB\cos\omega t$$

לסיום, נשתמש בחוק פארדיי על מנת למצוא את הכא"מ המתפתח בטבעת:

$$\varepsilon=-\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt}=-\frac{1}{c}SB\omega\sin\omega t=-\frac{\pi R^2B\omega}{c}\sin\omega t$$

<u>שאלה 2</u>



מסגרת ריבועית שצלעה a נעה במהירות קבועה $\vec{v}=v\hat{x}$.
ברגע $t=0$ הקצה הימני של המסגרת נכנס לאיזור בו קיים שדה מגנטי אחיד $\vec{B}=B\hat{z}$ (בכיוון החוצה מהדף). שדה זה קיים בתחום $0\le x\le a$.

א. מהו הכוח האלקטרומניע המושרה במסגרת?
ב. כעת נניח כי ההתנגדות של המסגרת היא R. חשב את גודל וכיוון הכוח שצריך להפעיל על המסגרת על מנת שתמשיך לנוע במהירות קבועה $v=v\hat{x}$ גם בתוך האיזור שבו קיים שדה מגנטי.

<u>תשובה 2</u>

סעיף א'

נשתמש בפיתוח שקיבלנו עבור מסגרת בשדה מגנטי בהרצאה 20.

$$\varepsilon=\begin{cases}\frac{va}{c}\left(0-B\right)=-\frac{va}{c}B & 0<t<\frac{v}{a}\\ \frac{va}{c}\left(B-0\right)=\frac{va}{c}B & \frac{v}{a}<t<\frac{2v}{a}\end{cases}$$

סעיף ב'

על מנת למצוא את הכוח שצריך להפעיל על המספגרת על מנת שתמשיך לנוע בתנועה קבועה, אנו צריכים לדרוש שסכום הכוחות הכללי יהיה אפס. נמצא את הכוח שהשדה המגנטי מפעיל על המסגרת המלבנית. הכוח שאנו מחפשים הינו כוח שגודלו זהה לכוח זה וכיוונו הפוך.

כיצד נוצר הכוח?
כאשר המסגרת נכנסת אל השדה המגנטי, יש שינוי בשטף המגנטי דרכה, ולכן לפי פארדיי יהיה כא"מ מושרה על המסגרת מהשדה המגנטי. הכא"מ המושרה שואף "להתנגד" לשדה המגנטי.
איך התנגדות זו מתרחשת? הכא"מ יוצר תנועת מטענים - זרם. הזרם החשמלי יוצר שדה מגנטי, שכיוונו יהיה הפוך לשדה המגנטי המשר, וכך יקטן השטף.
כעת, כאשר יש זרם (תנועת מטענים) במסגרת, השדה המגנטי מפעיל כוח על אותם מטענים. זהו הכוח הפועל על המסגרת.

ננתח את המצב כאשר המסגרת מתחילה להכנס אל השדה המגנטי, ורק צלע 2 בתוך התיל.
השטף המגנטי דרך המסגרת גדל, ולכן הכא"מ המושרה ישאף להקטין את השטף.
השדה המגנטי יוצא מהדף$\Leftarrow$ השדה המגנטי שהכא"מ ייצור בתוך המסגרת יהיה מכוון אל תוך הדף.
לכן, הזרם החשמלי יהיה עם כיוון השעון. הכוח הפועל על כל אחת מהדפנות:
בצלע התחתונה המטענים נעים שמאלה, השדה מכוון למעלה, ולכן לפי כלל יד ימין, הכוח פועל כלפי מעלה. בצלע העליונה - המטענים נעים ימינה, השדה מכוון למעלה, ולכן הכוח מכוון כלפי מטה.
מכיוון שזורם בצלעות אותו זרם, הכוחות שווים בגודלם, ולכן הם מבטלים זה את זה.
בצלע הימנית לעומת זאת, זורם זרם כלפי מטה $\Leftarrow$ פועל כוח בכיוון $-\hat{x}$, אולם אין כוח שיבטל אותו, ולכן זהו הכוח הכולל הפועל על המסגרת.
נביט בקטע התיל. אורך הקטע הוא $\Delta\vec{l}$. שטח החתך של התיל הוא a , וצפיפות המטענים היא $n = \frac{\text{נים}}{cm^3}$. מספר המטענים באלמנט התיל: $n \cdot \Delta J = n\left(\vec{a} \cdot \Delta\vec{l}\right)$.

$$\Delta\vec{F} = n \cdot \left(\vec{a} \cdot \Delta\vec{l}\right) \cdot \frac{q}{c}\left(\vec{V} \times \vec{B}\right) = \left(nq\vec{V} \cdot \vec{a}\right) \cdot \frac{1}{c}\left[\Delta\vec{l} \times \vec{B}\right] = \left(\vec{J} \cdot \vec{a}\right) \cdot \frac{1}{c} \cdot \left[\Delta\vec{l} \times \vec{B}\right] = \frac{1}{c}\left[I \cdot \Delta\vec{l} \times \vec{B}\right]$$

הכוח על הצלע:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{c}\left[iL_x\left(-\hat{y}\right) \times \vec{B}\right] = -\frac{1}{c}iaB\hat{x}$$

ולכן בזמן $0 < t < \frac{a}{v}$ הכוח שנצטרך להפעיל הינו $\frac{1}{c}iaB\hat{x}$.

כאשר המסגרת כולה בתוך השדה המגנטי אין שינוי בשטף. במקרה מוכלל של הבעיה הנתונ, שהיה גם קטע ביניים בו כל המסגרת הייתה נמצאת בתוך השדה המגנטי, לא היה בה זרם, מכיוון שלא היה בה שינוי בשטף.
כאשר המסגרת מתחילה לצאת מהשדה המגנטי, אנו צריכים לנתח מחדש את הבעיה.
כעת השטף קטן, ולכן הכא"מ המושרה ישאף להגדיל את השדה המגנטי (חוק לנץ).
כעת הזרם החשמלי יהיה נגד כיוון השעון. מניתוח הבעיה בצורה דומה לחלק הראשון, נקבל שגם כעת הכוח שנצטרך להפעיל הינו $\frac{1}{c}iaB\hat{x}$.

<u>הערה</u>

שינוי בשטף $\Leftarrow$ כא"מ מושרה.

<u>אלגוריתם רוטמן (1)</u>

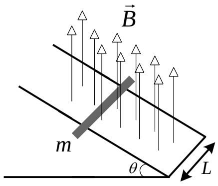
1. חשב את השטף.
2. גזור אותו.
3. מצא ε מושרה - חוק פארדיי.
4. מצא את כיוונו אינטואיטיבית ואמת לפי חוק לנץ.

<u>משפט רוטמן</u>

השדה שנוצר על ידי הכא"מ המושרה ישאף לגרום להקטנת שינוי השטף הקיים.

שינוי בזרם $\Leftarrow$ שינוי בשדה המגנטי $\Leftarrow$ שינוי בשטף המגנטי $\Leftarrow$ גורר כא"מ מושרה (פארדיי).

<u>שאלה 3</u>



מוט באורך L, מסה m והתנגדות R מחליק ללא חיכוך במורד על שתי מסילות מוליכות, מקבילות וחסרות התנגדות שנמצאות בשיפוע θ ביחס לאופק. שדה מגנטי אחיד B שורר בתחום בניצב לאופק כלפי מעלה. חשבו את מהירות המוט במצב שיווי משקל.

הרצאה 22 – השראה אלקטרומגנטית ומשוואות מקסוול

השראה אלקטרומגנטית ומשוואות מקסוול

הקדמה - פיתוח המשוואות

כאשר $\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$ משתנים בזמן (כלומר - מקורות השדות משתנים בזמן) אז לכל מסלול סגור C ולכל משטח פתוח S (גם בריק) מתקיים כי: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$ (פארדיי).

נשתמש במשפט סטוקס, ונקבל: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\cdot d\vec{a} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$, ונקבל את חוק פארדיי בצורה דיפרנציאלית: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$.

סיכום חוקי היסוד עבור השדה החשמלי והשדה המגנטי, כפי שהיו ידועים עד מקסוול

$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi\int_S \rho d\tau$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$
$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$

התיקון של מקסוול למשוואות היסוד: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

משוואות מקסוול

$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi\int_S \rho d\tau$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$
$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

מינוח של מקסוול: **זרם ההעתק יוגדר** $\vec{J}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. ומכאן $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{J} + \vec{J}_d\right)$

עקביות משוואת מקסוול המתוקנת עם משוואת הרציפות של הזרם

משוואת הרציפות של הזרם: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$

עקב זהות וקטורית, מתקיים: $\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right]\right)=0$. לפי התיקון נקבל כי

$0=\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{1}{c}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ נשתמש בחוק ביו-סבר: $\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}$, ונקבל:

$$\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

זרם ההעתק

כאשר השדה החשמלי משתנה, אנו יכולים להסתכל על הווקטור $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. נביט ביחידות של ווקטור זה.

$\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]=\frac{esu}{cm^2\cdot\sec}$. יחידות אלו זהות ליחידות של צפיפות הזרם. מתקיים: $\left[J\right]=\frac{esu}{cm^2\cdot\sec}$. לפיכך

- ניתן להתייחס לגודל זה כאל המשך התפלגות הזרם.

דוגמא לחשיבות תיקון מקסוול (זרם ההעתק)

קבל טעון במטען $Q(t)$ מתפרק דרך מעגל זרם. בקירוב: קבל לוחות טעון המתפרק דרך תיל ישר אינסופי. כיוון התיל יבחר להיות $\hat{z}$, ואילו הקבל על מישור xy. לכל נקודה במרחב, השדה המגנטי הינו $B\left(\vec{r},t\right)=\frac{2I(t)}{rc}$. בין לוחות הקבל קיים גם שדה חשמלי. השדה החשמלי בין הלוחות הינו $\vec{E}=4\pi\frac{Q(t)}{S}\left(-\hat{z}\right)$. כעת:

1. נבצע צירקולציה של $\vec{B}$ על מסלול מעגלי ניצב לתיל ומחוץ לקבל:

$$\oint_{C_1}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{4\pi}{c}I=2\pi rB(\vec{r})=\frac{4\pi}{c}\left(-\frac{dQ}{dt}\right)$$

2. נבצע צירקולציה של $\vec{B}$ על מסלול שמישורי עובר בין טבלות הקבל.

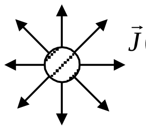
$$\oint_{C_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}=2\pi rB(\vec{r})=\int_S\left(\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)\cdot d\vec{a}$$

בין לוחות הקבל $\frac{4\pi}{c}\vec{J}=0$.

$$\oint_{C_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}=2\pi rB(\vec{r})=\int_S\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)\cdot d\vec{a}=\frac{1}{c}\int_S\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(-4\pi\frac{Q(t)}{S}\right)\right)\cdot d\vec{a}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial Q}{\partial t}\cdot\frac{S}{S}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

נשים לב שללא תוספת זרם ההעתק, היו מתקבלות תוצאות שונות, בסתירה לחוק אמפר.

<u>טענה</u>



תהי מערכת בה מתקיים: $\vec{J}\left(\vec{r},t\right)=J\left(r,t\right)\hat{r}$, אזי יתקיים כי $\vec{B}\equiv 0$.
כלומר: השדה המגנטי הנובע מהתפלגות זרמים בעלת סימטריה כדורית הוא אפס.

<u>הוכחה</u>

נחשב את הזרם על מעטפת כדור ברדיוס r.

$$\int_{Ball}\vec{J}\cdot d\vec{a}=\pi r2J(r,t)=\frac{dQ(r,t)}{dt}$$

נחשב את המטען בתוך הכדור - אינטגרל על נפח הכדור:

$$Q(r,t)=\int_{\mathrm{V}(ball)}\rho(r,t)d\tau$$

$$J(r,r)=-\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(r,t)}{dt}$$

$$\vec{E}(r,t)=\frac{Q(r,t)}{r^2}\hat{z}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\hat{r}$$

$$J(r,r)=-\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\vec{V}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{4\pi}{c}\left(-\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial E}{\partial t}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=0$$

ומכאן, עבור התפלגות זרמים רדיאלית, מתקיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B}\equiv 0$$

הרצאה 23 – גלים אלקטרומגנטיים, משוואות מקסוול בריק, משוואת הגלים הקלאסית, גלים במערכות מכאניות

גלים אלקטרומגנטיים

משוואות מקסוול בריק

משוואות מקסוול מובילות אל משוואת הגלים הקלאסית (בריק). בריק, מחוץ למקורות השדות השונים, מתקיים: $\rho \equiv 0, \vec{J} \equiv 0$. לפיכך, אנו יכולים לכתוב את משוואות מקסוול בריק בצורה הבאה:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

כיצד יתכנו שדות חשמליים ומגנטיים ללא מקורות? התשובה: ישנם מקורות שדה, אולם אנו מתעלמים מהם, ומסתכלים בריק באיזור מחוץ למערכות שם מתקיים כי $\rho \equiv 0, \vec{J} \equiv 0$.

משוואת הגלים הקלאסית

אנו למעשה מחפשים את $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)$. לפתרון שנמצא נקרא **גל**. נגזור שוב את משוואות מקסוול:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla} \times \vec{B}\right] = \left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] = \left[\vec{\nabla} \times \left[-c \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}\right]\right] \Rightarrow \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right]\right]$$

נפתח את המכפלה הווקטורית ונקבל את **משוואת הגלים הקלאסית עבור $\vec{E}(\vec{r},t)$:** $\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$

נדגיש כי משוואה זו היא למעשה שלוש משוואות:

$$\nabla^2 E_x(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 E_y(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 E_z(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

בצורה דומה נקבל את **משוואת הגלים הקלאסית עבור $\vec{B}(\vec{r},t)$:** $\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$

נעיר כי שילמנו מחיר מסוים כאשר השגנו את משוואות הגלים: ניתקנו את הקשר בין $\vec{E}, \vec{B}$ כגלים.

נפתח כעת פיתוחים עבור גלים. רוב הפיתוחים ייעשו עבור גלים מכניים מכיוון שקל יותר להתרגל כך לנושא הגלים. נניח לאחר מכן שהתוצאות נכונות גם עבור גלים אלקטרומגנטיים.

גלים במערכות מכניות

גל זוהי הפרעה של תווך (מדיום) המקיימת את משוואת הגלים הקלאסית.
נוכל לדבר על **הפרעות** שונות: הפרעה סקלרית $\psi(z,t)$, הפרעה ווקטורית בתווך חד ממדי $\vec{\psi}(z,t)$, הפרעה סקלרית בתווך תלת ממדי $\psi(\vec{r},t)$. בשם **משדר**, נכנה את הכוח שיוצר את ההפרעה הגלית.
כאשר נעסוק בגלים, נפריד בין בעיות על פי סוג התווך וסוג ההפרעה. נבחין כי תווך יכול להיות חד ממדי, בזמן שלהפרעה יהיה יותר ממימד אחד.

כאשר נעסוק **בתווך חד ממדי**, נקבע את ציר z להיות בכיוון התווך. (דוגמא לתווך חד ממדי היא קפיץ המחובר לקיר).
להפרעה הנמשכת זמן קצר בלבד נקרא **פולס**.
כאשר ההפרעה הינה בכיוון התקדמות התווך נקרא לה **הפרעה אורכית**.
כאשר ההפרעה הינה בניצב לכיוון התקדמות התווך נקרא לה **הפרעה רוחבית**.
יתכן גם שגל אחד יורכב גם מהפרעה אורכית וגם מהפרעה רוחבית.

<u>משוואת הגלים הקלאסית לתווך חד ממדי והפרעה סקלרית</u>

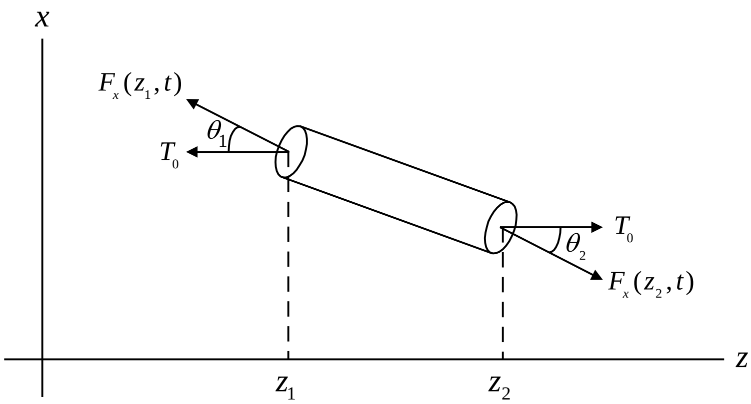
נבחר תווך המשתרע לאורך ציר z. כמו כן תהי הפרעה סקלרית $\psi(z,t)$.
נאמר שהפרעה היא גל אם היא מקיימת את המשוואה הבאה:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi\left(z,t\right)}{\partial t^2}}$$

כאשר v זוהי ***מהירות הפאזה***.
משוואה זו היא הצורה הפשוטה ביותר של משוואת הגלים הקלאסית (מכיון שאנו דנים בתווך חד ממדי, ובהפרעה סקלרית בלבד).

משוואת הגלים הקלאסית למיתר אינסופי ותנועה רוחבית בכיוון אחד

המיתר מתוח - במצב של שיווי משקל, על כל במיתר פועל אותו כוח בכיוונים הפוכים.
המתיחות היסודית היא $T_0\left[dyne\right]$. נניח שההפרעה ממצב שיווי משקל היא בסדר גודל קטן ביחס למיתר, כלומר, המיתר לא משתנה את אורכו בזמן התנועה. למיתר צפיפות מסה אחידה: $\rho\left[\frac{gram}{cm}\right]$.
קירוב: המתיחות לאורך כיוון $\hat{z}$ (על הקטע (z_1,z_2) נשמרת והיא T_0 .



על אלמנט המיתר שאורכו $\Delta z=z_2-z_1$ ומסתו $\Delta m=\rho\cdot\Delta z$ פועל כוח בכיוון רוחבי $\hat{x}$:

$$F_x(z,t)=F_x(z_2,t)-F_x(z_1,t)=T_0\left(\mathrm{tg}\theta_2-\mathrm{tg}\theta_1\right)$$

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}\Rightarrow F_x(z,t)=T_0\left(\psi_z(z_2,t)-\psi_z(z_1,t)\right)\Rightarrow$$

$$F_x(z,t)=T_0\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2}\cdot\Delta z,\ a_x(z,t)=\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2}$$

נשתמש בחוק השני של ניוטון:

$$m\cdot a_x = F_x(z,t) \Rightarrow \rho\cdot\Delta z\,\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2}\cdot\Delta z$$

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{\rho}{T_0}\cdot\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{V^2 = \frac{T_0}{\rho}}$$

ההפרעה שראינו היא למעשה הפרעה ווקטורית, אבל יש לה רק רכיב אחד, ולכן אנו מתייחסים אליה כאל הפרעה סקלרית.

פתרונות של משוואת הגלים הקלאסית

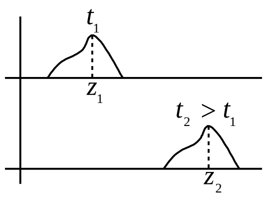
שני סוגים של פתרונות:

א. **גל רץ** (תווך אינסופי): נקבל פתרון מהצורה הבאה: $\psi(z,t) = f(z-vt)$, כאשר $z-vt$ = פאזה.
נוכיח כי פונקציה זו מהווה פתרון:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{df}{d(z-vt)}\cdot\dfrac{\partial(z-vt)}{\partial z} = f'\cdot 1 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''\cdot 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = f'\cdot\dfrac{\partial(z-vt)}{\partial t} = f'\cdot(-v) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''v^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = f'' = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}f''v^2 = f''$$

ומכאן $\psi(z,t) = f(z-vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים.

בצורה דומה ניתן לומר כי גם $g(z+vt) = \psi(z,t)$ פונקצית גל.



$$\psi(z_2,t_2) = \psi(z_1,t_1) \Rightarrow f(z_2 - vt_2) = f(z_1 - vt_1)$$

$$z_2 - vt_2 = z_1 - vt_1 \Rightarrow v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

פונקציה זו מתארת הפרעה שמתקדמת על ציר z במהירות שחושבה. זהו גל רץ.

<u>דוגמא פרטית לגל רץ: גל הרמוני</u>

גל הרמוני: $\psi(z,t) = A\sin(kz - \omega t)$,

כאשר:

k (קבוע) - **מספר הגל** ω (קבוע) - **תדירות זוויתית** A (קבוע) - **אמפליטודה**

$$\psi(z,t) = A\sin(kz - \omega t) = A\sin\left[k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right] = f(z - vt) \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

זמן מחזור: $T\,[\sec]$ **תדירות:** $\nu = \dfrac{1}{T}$ **תדירות זוויתית:** $\omega = 2\pi\nu$

אין צורך להוכיח ישירות כי הגל ההרמוני מקיים את משוואת הגלים, מכיוון שהוא מקרה פרטי של המשוואה שמצאנו קודם.

אורך הגל יוגדר להיות $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ וזהו המרחק בין כל שתי נקודות אקויולנטיות של הגל.

מחזוריות במקום (z) עם אורך גל λ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

מחזוריות בזמן נתונה על ידי:

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$$

$$\psi(z,t) = A\sin\left(2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

תנאי הכרחי לקיומו של גל רץ: מערכת פתוחה.

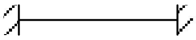
<u>הערות</u>

- כל גל במערכת פתוחה הוא גל רץ.
- משוואת הגלים קושרת את המקום עם הזמן.

הרצאה 24 – גל עומד, גלים במרחב ובמישור

ב. **גל עומד** במערכת סגורה (סופית)
כל נקודה זזה באמפליטודה קבועה, אם כי לכל נקודה תיתכן אמפליטודה משלה.

דוגמא

מיתר מוחזק בשני קצותיו. . למיתר אורך L. המיתר עשוי מחומר בצפיפות ρ , והוא מתוח בצפיפות אורכית T_0 . כל נקודה מבצעת תנועה הרמונית. האמפליטודה היא פונקציה של המקום.
פתרון של גל עומד (הרמוני): $\boxed{\psi(z,t)=A(z)\cos(\omega t)}$.
בגל רץ הפאזה (תוכן הסינוס) הוא קומבינציה ליניארית של פונקציה של המקום ופונקציה של הזמן.

נחפש מיהו $A(z)$:

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2}=\frac{d^2A(z)}{dz^2}\cos(\omega t)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2}=\frac{A(z)}{v^2}\left[-\omega^2\cos(\omega t)\right]\Rightarrow\frac{d^2A(z)}{dz^2}=-\frac{\omega^2}{v^2}A(z)$$

$$k=\frac{\omega}{v}\Rightarrow\boxed{A(z)=\alpha\sin(kz)+\beta\cos(kz)}$$

הקבועים נקבעים לפי תנאי שפה/התחלה.
במקרה שלנו המיתר מוחזק בשני קצותיו, ולכן $A(0)=A(L)=0$. ידוע כי $A(0)=\beta=0$ ולכן:
$A(z)=\alpha\sin(kz)$.
כעת:

$$A(L)=\alpha\sin(kL)=0\Rightarrow k_nL=n\pi\qquad(n=0,1,2,\dots)\Rightarrow$$

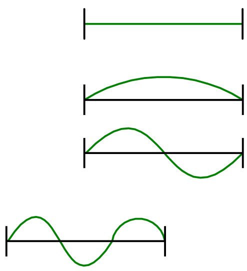
מספר הגל: $\boxed{k_n=\frac{\pi}{L}\cdot n}$ **אורך הגל:** $\boxed{\lambda_n=\frac{2L}{n}}$

בניגוד למקרה של הגל הרץ, בו k יכול לקבל כל ערך ממשי, במקרה של גל עומד (במערכת סגורה), הערך של k הוא כפולה שלמה של $\frac{\pi}{L}$. כמו כן:

תדירות זוויתית: $\boxed{\omega_n=v\cdot k_n}$ **תדירות גל עומד** :

$$\boxed{f_n=\nu_n=\frac{1}{2\pi}vk_n=\frac{v}{2L}\cdot n}$$

תדירות יסודית של גל עומד היא $\nu_1=\frac{v}{2L}$. כמו כן, $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n$ נקראות **תדירויות הרמוניות** של המיתר, והן מגדירות את כל התדירויות האפשריות למיתר.



מצב שיווי משקל
$n=1$ תנועה יסודית
$n=2$ הרמונית ראשונה
$n=3$ הרמונית שנייה

גלים בתווך תלת ממדי (מרחב) ודו ממדי (מישור)

א. גל רץ במרחב

1. גלים מישוריים:

במימד אחד קיבלנו: $\psi(z,t)=f(z-vt)$.

בשלושה ממדים מתקיים: $\nabla^2\psi(\vec{r},t)=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

פתרון של משוואת גל רץ בתווך 3 ממדי: $\boxed{\psi(\vec{r},t)=f\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt\right)}$

הוכחה:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\left(n_x x+n_y y+n_z z-vt\right)=f''\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt\right)\cdot n_x{}^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=f''\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt\right)\cdot n_y{}^2,\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=f''\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt\right)\cdot n_z{}^2$$

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t)=\left(n_x{}^2+n_y{}^2+n_z{}^2\right)f''=f''$$

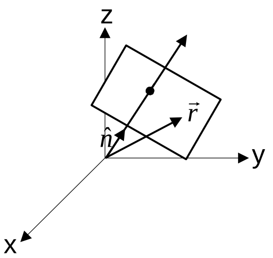
צילום הגל ברגע t_1 מסויים: $\psi(\vec{r},t_1)=f\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt_1\right)$.

מכאן: $\hat{n}\cdot\vec{r}-vt_1=\text{const}\Leftarrow\hat{n}\cdot\vec{r}=\beta$, כאשר β קבוע.

$n_x x+n_y y+n_z z=\beta$ זוהי משוואה של מישור אשר ניצב ל- $\hat{n}$

(וקטור יחידה במרחב מגדיר מישור הניצב לו).

המשוואה בעצם מתארת גל אשר מקבל את אותו הערך על מישורים ניצבים לכיוון $\hat{n}$, ולכן גל זה נקרא גל מישורי מתקדם במרחב.



פתרון של משוואת גל רץ בתווך 2 ממדי: $\boxed{\psi(\vec{r},t)=f\left(n_x x+n_y y-vt\right)}$

<u>הגדרה</u>

חזית הגל - המקום הגאומטרי שבו זמן נתון t יש ל- ψ ערך מסויים. כאשר חזית הגל היא מישורית, הגל הוא גל מישורי (3 ממדים). כאשר הגל הוא דו ממדי - חזית הגל היא חזית קווית.

<u>מקרה פרטי</u>: **גל מישורי הרמוני רץ:** $\boxed{\psi(\vec{r},t)=f\left(\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

$\vec{k}$ זהו **וקטור הגל** (וקטור קבוע!). מתקיים: $\left|\vec{k}\right|=\frac{2\pi}{\lambda}$. $\hat{k}$ זהו כיוון התקדמות הגל.

מהירות הפאזה: $\boxed{v=\frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|}=\lambda\nu}$

$$\psi(\vec{r},t)=A\sin\left[\left|\vec{k}\right|\left(\hat{k}\cdot\vec{r}-\left(\frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|}\right)t\right)\right]$$

2. גל כדורי (במישור - גל מעגלי): נובע ממקור נקודתי.

$$\boxed{\psi(\vec{r},t)=\frac{f\left(\vec{r}-vt\right)}{r}}$$

תרגול 11

שאלה 1

קבל בנוי משתי דיסקיות בעלות רדיוס a במרחק d זו מזו. בחלל שבין שני הלוחות נמצא חומר מוליך בעל מוליכות סגולית σ. על הקבל מופעל מתח $V(t)=V_0\sin(\omega t)$. חשבו את השדה המגנטי המושרה במרחק r מציר הדיסקיות. הניחו כי $r \ll a,d$, ש- ω קטן, והזניחו את אפקטי השפה.

תשובה 1

$$\vec{E}=\frac{V}{d}\hat{z}=\frac{V_0\sin(\omega t)}{d}\hat{z} \qquad \vec{J}=\sigma\vec{E}=\frac{V_0\sigma\sin(\omega t)}{\alpha}\hat{z}$$

נשתמש במשוואת מקסוול:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{V_0\omega\cos(\omega t)}{\alpha}\hat{z}+\frac{V_0\sigma\sin(\omega t)}{\alpha}\cdot\frac{4\pi}{c}\hat{z}$$

לפי סטוקס:

$$\iint\limits_{\substack{\text{דיסקה ברדיוס} \\ r}}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)d\vec{S}=\oint\limits_{\substack{\text{מעגל ברדיוס} \\ r}}\vec{\mathrm{B}}d\vec{l}$$

$$2\pi rB=\frac{\pi r^2}{c}\cdot\frac{V_0\omega\cos(\omega t)}{\alpha}\hat{z}+\frac{4\pi}{c}\cdot\frac{V_0\sigma\sin(\omega t)}{\alpha}\hat{z}$$

ומכאן:

$$B(r)=\frac{V_0r}{2cd}\left(4\pi\sigma\sin(\omega t)+gw\cos(\omega t)\right)\hat{\theta}$$

שאלה 2

גל רוחבי מתקדם לאורך מיתר בכיוון החיובי של ציר x, במהירות $12\frac{m}{\sec}$, אמפליטודה $0.05m$, ואורך גל של $0.4m$. ברגע $t=0$ הקצה $x=0$ של המיתר נמצא במרחק אפס, והוא נע בכיוון y החיובי.

א. מהי התדירות f, זמן המחזור T, ומספר הגל k של גל זה?
ב. כתבו את משוואת הגל - $y(x,t)$.
ג. מהו המרחק של הנקודה $x=0.25$ בזמן $t=0.15\sec$?

תשובה 2

נוסחאות בהן נשתמש:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}, \qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}, \qquad v=\frac{\lambda}{T}, \qquad y(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$$

הגדלים הקשורים לשאלה: $v=12\left[m/\sec\right], A=0.05m, \lambda=0.5m$.

א. $k=5\pi\ ,\ f=\frac{1}{T}\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}=\frac{1}{30}\sec$.

ב. $y(x,t)=0.05\cdot\sin\left(5\lambda\cdot x-60\pi t\right)$.

ג. $y(x=0.25m,t=0.15\sec)=-0.035$

הרצאה 25 – גלים אלקטרומגנטיים, גל מישורי רץ, שטף האנרגיה של הגל האלקטרומגנטי

גלים אלקטרומגנטיים

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

- המשוואות מתאימות לתווך תלת ממדי, ולהפרעה (גל) תלת ממדית.
- במקרה של גלים אלקטרומגנטיים, c היא מהירות הפאזה, כלומר מהירות האור היא מהירות התקדמות הגל בריק.
- פתרונות משוואות אלו נקראים **גלים אלקטרומגנטיים**.

מקרה פרטי - גל מישורי רץ

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 f\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct\right) \qquad \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0 f\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct\right)$$

- קיבלנו שתי פונקציות מאותה צורה בדיוק, וזאת מכיוון שהתחלנו גם עם משוואות סימטריות לחלוטין.
- מדוע פתרון זה של המשוואה נכון? בהרצאה הקודמת בוצע פיתוח דומה על פונקציה סקלרית. במקרה כעת אנו מציגים פתרון שהוא פונקציה ווקטורית, אולם לפונקציה זו תכונה מיוחדת -
  על פני מישור הניצב לווקטור יחידה $\hat{n}$, כל הנקודות מקבלות את אותו ערך של הגל האלקטרומגנטי.
- $\hat{n}$ זהו כיוון התקדמות הגל.
- $\vec{E}_0$ היא אמפליטודת השדה החשמלי. $\vec{B}_0$ היא אמפליטודת השדה המגנטי. עבור גל מישורי, שניהם קבועים.

תזכורת: משוואות מקסוול בריק

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

תכונות גלים א"מ מישוריים רצים

נשתמש בפתרונות שאנו מציעים על מנת לקבל את תכונות הגלים האלקטרומגנטיים.
ראשית, נציב את $\vec{E}(\vec{r},t)$ במשוואה $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big[E_{0_x}\, f(n_x x+n_y y+n_z z-ct)\Big]=E_{0_x}\, f'(n_x x+n_y y+n_z z-ct)\cdot n_x$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big[E_{0_y}\, f(n_x x+n_y y+n_z z-ct)\Big]=E_{0_y}\, f'(n_x x+n_y y+n_z z-ct)\cdot n_y$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\Big[E_{0_z}\, f(n_x x+n_y y+n_z z-ct)\Big]=E_{0_z}\, f'(n_x x+n_y y+n_z z-ct)\cdot n_z$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=f'\cdot\left(E_{0_x}n_x+E_{0_y}n_y+E_{0_z}n_z\right)=f'\cdot\left(\vec{E}_0\cdot\hat{n}\right)=0$$

מכאן $\vec{E}_0\perp\hat{n}$, וכך נגיע אל התכונה הראשונה של גלים אלקטרומגנטיים: $\boxed{\vec{E}\left(\vec{r},t\right)\perp\hat{n}}$.

כעת, נציב את $\vec{B}(\vec{r},t)$ במשוואה $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, ונקבל $f'\cdot\left(\vec{B}_0\cdot\hat{n}\right)=0$, ומכאן: $\boxed{\vec{B}\left(\vec{r},t\right)\perp\hat{n}}$

תוצאה חשובה:
גל אלקטרומגנטי הוא גל רוחבי. גם השדה החשמלי וגם השדה המגנטי ניצבים לכיוון ההתקדמות.

נמשיך לחפש תכונות נוספות של הגל האלקטרומגנטי:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

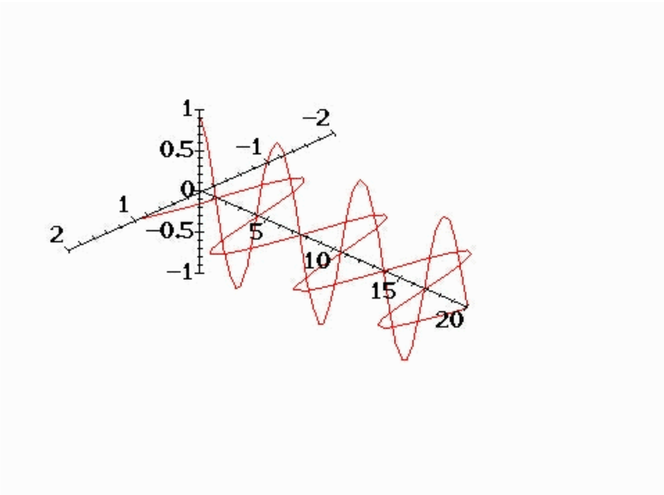
$$\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_0\cdot f\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct\right)\right]=\left[\hat{n}\times\vec{E}_0\cdot f'\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct\right)\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0\cdot f\left(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{c}\cdot\vec{B}_0\cdot f'\cdot\left(-c\right)\Rightarrow\left[\hat{n}\times\vec{E}_0\right]=\vec{B}_0$$

מסקנות:

א. $\vec{E}_0\perp\vec{B}_0$ ומכאן $\vec{E}\perp\vec{B}\perp\hat{n}$ - $\vec{E},\vec{B},\hat{n}$ מהווים שלשה ימנית.

ב. $\left|\hat{n}\times\vec{E}_0\right|=\left|\vec{E}_0\right|=\left|\vec{B}_0\right|$. ל- $\vec{E},\vec{B}$ אותו גודל, וזאת מכיוון שמשוואות מקסוול סימטריות עבור $\vec{E}$ ועבור $\vec{B}$. מתקיים: $\hat{n}\times\vec{E}=\vec{B}$.

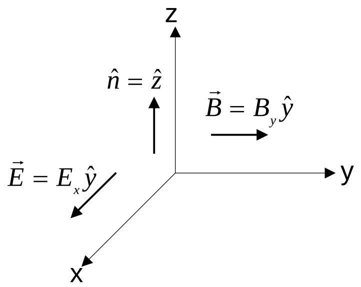


ניקח את הביטוי $\hat{n}\times\vec{E}=\vec{B}$ ונכפול משני הצדדים ב- $\vec{E}$.

$$\left[\vec{E}\times\left[\hat{n}\times\vec{E}\right]\right]=\vec{E}\times\vec{B}\Rightarrow\hat{n}\cdot\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)-E\left(\hat{n}\cdot\vec{E}\right)=\vec{E}\times\vec{B}$$

ומכאן: $\boxed{\hat{n}\cdot E^2=\vec{E}\times\vec{B}}$

<u>שטף האנרגיה של הגל האלקטרומגנטי (וקטור Poynting)</u>



נניח גל אלקטרומגנטי רץ בכיוון $+\hat{z}$, והוא מישורי כך ש- $\vec{E}\parallel\hat{x},\vec{B}\parallel\hat{y}$.

$$\vec{E}=E_0f(z-ct)\hat{x}=E_x(z,t)\hat{x}$$

$$\vec{B}=B_0f(z-ct)\hat{y}=B_y(z,t)\hat{y}$$

הגל נושא אנרגיה. כמה אנרגיה עוברת דרך משטח בכיוון ניצב לכיוון ההתקדמות?

נבנה תיבה מקבילה לציר z. שטח החתך שלה יסומן A, וגובהה יסומן Δz . נבדוק את השינוי עם הזמן של האנרגיה החשמלית והמגנטית בשטח זה.

כזכור, **צפיפות האנרגיה** הקשורה בשדות הינה: $\frac{B^2}{8\pi},\frac{E^2}{8\pi}$.

כמות האנרגיה האלקטרומגנטית בתיבה שנפחה $\Delta\tau=A\cdot\Delta z$:

$$\Delta U=\frac{1}{8\pi}\left(E_x^2(z,t)+B_y^2(z,t)\right)\cdot A\cdot\Delta z$$

ΔU היא פונקציה של המקום ושל הזמן, וזאת מכיוון שהשדות עצמם הם פונקציה של המקום ושל הזמן.

$$\frac{\partial(\Delta U)}{\partial t}=\frac{1}{8\pi}\left(2E_x\cdot\frac{\partial E_x}{\partial t}+2B_y\cdot\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)\cdot A\cdot\Delta z$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=c\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right]_x=c\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)=-c\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=-c\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]_y=-c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=-c\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial(\Delta U)}{\partial t}=-\frac{c\cdot\Delta z}{4\pi}\left(E_x\frac{\partial B_y}{\partial z}+B_y\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)=-\frac{c}{4\pi}\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xB_y\right)$$

נביט בביטוי המתמטי לנגזרת:

$$-\Delta z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xB_y\right)=-\Delta z\left[E_x(z+\Delta z)B_y(z+\Delta z)-E_x(z)B_y(z)\right]\cdot\frac{1}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{A}\frac{\partial U(z,t)}{\partial t}=\left(S_z(z)-S_z(z+\Delta z)\right)$$

כאשר $\vec{S}$ הוא **וקטור Poynting:** $\boxed{\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]}$ - קצב שינוי אנרגיה ביחידת זמן ליחידת נפח בכיוון ההתקדמות.

במקרה הפרטי, $\vec{E}=E_x\hat{x},\vec{B}=B_y\hat{y}$, מתקיים: $S(z,t)=S_z\hat{z}=\frac{c}{4\pi}E_xB_y\hat{z}$.

נכליל: מקרה פרטי הוא גל אלקטרומגנטי, ואז **וקטור פוינטינג** בכיוון התקדמות הגל הינו $\boxed{S=\frac{cE^2}{4\pi}\hat{n}}$.

משמעות הווקטור: שטף האנרגיה בכיוון $\hat{n}$.

יחידות: $\boxed{[S]=\frac{erg}{cm^2\cdot\sec}}$

<u>מקרה פרטי - גל אלקטרומגנטי (מונוכרומטי) מישורי</u>

המקרה פרטי מכיוון ש- $\vec{E}\perp\vec{B}$ תמיד, והשדות שווים בגודלם בכל רגע (אם כי גודל זה משתנה).

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)=\vec{E}_0\sin\left(2\pi\frac{\hat{k}}{\lambda}\cdot\vec{r}-\frac{t}{T}\right)$$

תזכורת:

$$\left|\vec{k}\right|=\frac{2\pi}{\lambda}\qquad \nu=\frac{1}{T}\qquad \lambda\nu=c\qquad \omega=c\cdot k\qquad c=3\cdot10^{10}$$

$\hat{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל, $\vec{E}_0$ זוהי האמפליטודה שלו. אורך הגל הוא λ והתדירות היא ν .

אנו נותנים כאן משמעות חדשה ל- $\vec{k}$: זהו וקטור ההתקדמות של הגל.

החלק המגנטי של הגל:

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

ההבדל בין החלק החשמלי לחלק המגנטי: $\vec{B}_0=\hat{k}\times\vec{E}_0$. מבחינת גודל: $\left|B_0\right|=\left|E_0\right|$

הערה: מרבית התופעות הפיסיקליות נובעות מהחלק החשמלי של השדה האלקטרומגנטי ולכן למרות ששני החלקים זהים בגודלים, בדרך כלל נדבר ונשתמש בנוסחאות בחלק החשמלי.
ווקטור פוינטינג של הגל:

$$\vec{S}=\left[\frac{c}{4\pi}\cdot E_0^{\;2}\sin^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right]\cdot\hat{k}$$

עוצמת הגל I: העוצמה I היא למעשה הערך הממוצע של ווקטור הפוינטינג $\boxed{I=\left\langle\vec{S}\right\rangle}$. ערך זה הוא ערך קבוע המתאר את עוצמת הגל.
עבור גל מונוכרומטי:

$$I=\frac{c}{4\pi}\cdot E_0^{\;2}\left\langle\sin^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right\rangle=\frac{c}{8\pi}\cdot E_0^{\;2}$$

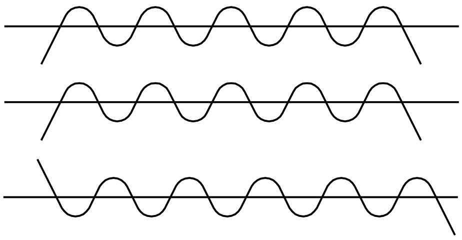
הערה: עבור גל הרמוני מעגלי, העוצמה קטנה ב- $\frac{1}{r}$, ועבור גל כדורי העוצמה יורדת לפי $\frac{1}{r^2}$.

הספק: ההספק המשודר הוא האינטגרל המשטחי של ווקטור פוינטינג הממוצע או באופן זהה של העוצמה.
אנו מקבלים את ההספק הממוצע:

$$\boxed{\vec{P}=\vec{S}A=\iint_s Sda=IA}$$

הרצאה 26 – חיבור גלים אלקטרומגנטיים קוהרנטיים, ניסוי יאנג, התאבכות מ-N סדקים

חיבור גלים אלקטרומגנטיים קוהרנטיים



הגדרה

גלים יקראו **קוהרנטיים** אם אין ביניהם הפרש פאזה, או שהפרש הפאזה ביניהם אינו משתנה.

דוגמא: שני הגלים העליונים בשרטוט הינם קוהרנטיים, ואילו השלישי אינו קוהרנטי אליהם.

הצגה קומפלקסית של גל הרמוני

גל הרמוני מישורי:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

נרצה להציג את **הגל בצורה קומפלקסית**:

$$E^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha\Rightarrow\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0\exp\left\{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right\}}$$

התופעה הפיסיקלית:

$$\boxed{\vec{E}=\mathrm{Re}\left(\vec{E}\left(\vec{r},t\right)\right)}$$

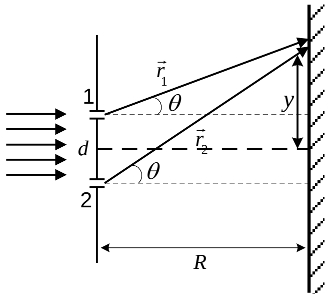
<u>התאבכות</u>

נתייחס לסופרפוזיציה של שתי פונקציות גל: $\psi=\psi_1(\vec{r},t)+\psi_2(\vec{r},t)$.
העוצמה הקשורה בגל המתקבל פרופורציונית ל- $|\psi|^2$:

$$I\sim|\psi|^2=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+2\,\mathrm{Re}\left|\psi_1\cdot\psi_2^*\right|$$

$|\psi_1|^2,|\psi_2|^2$ פרופורציוניים לעוצמות הגלים ψ_1,ψ_2 בהתאמה.
האיבר הנוסף, $2\,\mathrm{Re}\left|\psi_1\cdot\psi_2^*\right|$, אשר תלוי בפאזה היחסית (בהפרש הפאזות) הינו **איבר התאבכות**.
מסקנה: עוצמות של סופרפוזיציה של גלים אינן מתחברות.
מסקנה זו נובעת מעקרון הסופרפוזיציה של גלים, ומהעובדה שעוצמת הגל פרופורציונית ל- $|\psi|^2$.
איבר ההתאבכות הינו $\boxed{I_{\text{int}}\sim2\,\mathrm{Re}\left[\psi_1\cdot\psi_2^*\right]}$. כאשר $\psi_1\cdot\psi_2^*$ הינו ממשי וחיובי, כלומר כאשר $I_{\text{int}}\sim+2\left|\psi_1\cdot\psi_2^*\right|$, אז I_{int} מקבל את הערך המקסימלי. במקרה זה ψ_1,ψ_2 הינם בעלי אותה פאזה, ואנו אומרים שהגלים ב"פאזה". הגלים במקרה זה מגבירים זה את זה, ולכן ההתאבכות במקרה זה מכונה **התאבכות בונה**. מקרה שני הינו כאשר $\mathrm{Re}\left[\psi_1\cdot\psi_2^*\right]$ הינו ממשי ושלילי, כלומר, $I_{\text{int}}\sim-2\left|\psi_1\cdot\psi_2^*\right|$. כאן I_{int} הינו מינימלי, כאשר ψ_1,ψ_2 נוטים לבטל אחד את השני בהתאבכות. סוג זה של התאבכות נקרא **התאבכות הורסת**. במקרה זה הפרש הפאזה בין ψ_1 ל- ψ_2 הינו π .
תנאי הכרחי להופעת התאבכות הוא שהגלים יהיו קוהרנטיים.

ניסוי יאנג



ניסוי יאנג מדגים את תופעת ההתאבכות. בניסוי זה מתייחסים לגל מישורי הפוגע בשני סדקים צרים מאוד, והמגיע למסך אטום. שני הסדקים מרוחקים מרחק d זה מזה, כאשר אנו מניחים כי d הוא מסדר גודל של λ . שני הגלים המתאבכים הינה גלים כדוריים מונוכרומטים היוצאים מהסדקים (הסדקים משמשים כמקורות), וזאת עקב הגל המישורי הפוגע בהם. תמונת ההתאבכות מופיעה על המסך המרוחק. התופעה הנצפית: עוצמת האור מתחלקת במרחב ל"קווי התאבכות".

נניח כי $R \gg \lambda, d$, ומכאן: $\vec k$ הוא אותו ווקטור עבור שני הגלים, וכן $\left|\vec E_0(\vec r_1)\right| = \left|\vec E_0(\vec r_2)\right| = \vec E_0$.
כמו כן אנו מניחים כי הזווית θ היא אותה זוויות עבור שני הסדקים.

$$\vec E(\vec r_1,t) = \vec E_0 \exp\left\{i\left(\vec k\cdot \vec r_1 - \omega t\right)\right\}$$
$$\vec E(\vec r_2,t) = \vec E_0 \exp\left\{i\left(\vec k\cdot \vec r_2 - \omega t\right)\right\}$$
$$\vec E(\vec r,t) = \vec E(\vec r_1,t) + \vec E(\vec r_2,t)$$

הפרש הפאזה בין שני הגלים הכדוריים ψ_1,ψ_2 בנקודת התצפית הינו עקב הפרש הדרכים $\lambda r = d\sin\theta$ של שני הגלים המתקדמים מהסדקים אל נקודת התצפית.

מתקיים: $\left|\vec r_2 - \vec r_1\right| = d\sin\theta$, $\quad \dfrac{\vec r_1 + \vec r_2}{2} = \vec r$, ולכן:

$$\vec E(\vec r,t) = \vec E_0 \exp\left\{i\left(\vec k\cdot\vec r - \omega t\right)\right\}\left[\exp\left\{i\cdot\vec k\cdot\left(\vec r_1 - \vec r\right)\right\} + \exp\left\{i\cdot\vec k\cdot\left(\vec r_2 - \vec r\right)\right\}\right]$$

$$-\vec k\cdot\left(\vec r - \vec r_1\right) = -\vec k\cdot\frac{d}{2}\sin\theta \qquad \vec k\cdot\left(\vec r_2 - \vec r\right) = \vec k\cdot\frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \exp\left\{i\cdot\vec k\cdot\left(\vec r_1 - \vec r\right)\right\} + \exp\left\{i\cdot\vec k\cdot\left(\vec r_2 - \vec r\right)\right\} = 2\cos\left(\vec k\cdot\frac{d}{2}\sin\theta\right)$$

$$\vec E(\vec r,t) = \vec E_0 \exp\left\{i\left(\vec k\cdot\vec r - \omega t\right)\right\}\cdot 2\cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)$$

אנו מקבלים כי **עוצמת הגל** היא:

$$\boxed{I(\theta) = \left\langle\left|\vec S\right|\right\rangle = \frac{c}{4\pi}\cdot\left\langle\left|\vec E(\vec r,t)\right|^2\right\rangle = \frac{c}{4\pi}\cdot E_0^{\,2}\cdot 2\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}$$

נרצה גם לבטא את עוצמת הגל כפונקציה של y.

מתקיים: $\sin\theta = \dfrac{y}{R}$ $\Leftarrow$ $y = Rtg\theta \approx R\sin\theta$ ולכן נוכל לרשום גם: $\boxed{I(\theta) = I_0\cos^2\left(\dfrac{kyd}{2R}\right)}$

גורם הפאזה המרחבי: $\boxed{\delta(\theta) = \dfrac{kd\sin\theta}{2} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{d\sin\theta}{2} = \dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}$

בזוויות θ_i בהן העוצמה מקסימלית יש התאבכות בונה. התאבכות בונה תתקבל כאשר $\frac{\pi d\sin\theta_m}{\lambda}=\pm\pi m$, כלומר עבור $\sin\theta_m=\pm\frac{\lambda}{d}m$. בזוויות θ_i בהן העוצמה 0 יש התאבכות הורסת.

התאבכות הורסת תתקבל עבור $\sin\theta_m=\pm\frac{\lambda}{d}\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

מרחק בין מקסימות: נסמן ב- Δy את המרחק בין מקסימות (מינימות) סמוכים.

ממשוואת העוצמה שקיבלנו, נובע כי $\frac{kd\Delta y}{2R}=\pi$ ולכן $\boxed{\Delta y=\frac{2\pi R}{kd}=\frac{R\lambda}{d}}$.

התאבכות מ-N סדקים (מקורות קוהרנטיים)

נכליל כעת את ניסוי יאנג.

במקרה זה יש בידינו N סדקים, כאשר המרחק בין כל שני סדקים הוא d. רוחב כל סדר שואף לאפס.

מתקיים:

$$\boxed{|\psi|^2=A^2\left(\frac{\sin\left(\frac{Nkd\sin\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\right)^2=A^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}Nd\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}\right)^2}$$

נחקור את הפונקצה שקיבלנו.

1. כאשר המכנה שואף לאפס - נקודות מקסימה:

זאת מכיוון ש: $\frac{\frac{\pi}{\lambda}dN\theta}{\frac{\pi}{\lambda}d\theta}\rightarrow N$, ואז מתקיים: $\boxed{|\psi|^2\rightarrow A^2N^2}$.

מקרה זה קורה כאשר $\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta=m\pi$. ניתן לראות שזה קורה כאשר ההפרש הוא אורכי גל שלמים,

ומכאן נקבל **נקודת מקסימה** כאשר $\boxed{\sin\theta=\frac{\lambda}{d}m,\quad m=0,1,\ldots}$.

2. כאשר המונה מתאפס יש בידינו נקודת מינימה:

נקבל **נקודת מינימה** כאשר $\boxed{\sin\theta=\frac{\lambda m}{dN},\quad m=0,1,\ldots}$.

<u>הערה</u>

ניתן לראות שכאשר $m=0$ גם המונה וגם המונה מתאפסים, וכן שעבור $m=N$ הם מתאפסים

<u>הערה</u>

ניתן לראות שיש הרבה יותר מינימות מאשר מקסימות, מכיוון שהתנאי על המינימות קטן יותר - קל יותר ליצור כפולה שלו.

<u>הערה</u>

בין כל שני מקסימה ראשיים יש N-2 מקסימה משניים.

<u>הערה</u>

מספר המקסימות קטן כאשר d גדל.

<u>מסקנה</u>

סה"כ מקסימות שנקבל הוא $\boxed{M = 2\frac{d}{\lambda}+1}$.

<u>נוסחה מקבילה להתאבכות על ידי עוצמה:</u>

$$\boxed{I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{Nkd\sin\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\right)^2}$$

תרגול 12

משוואת הגלים

תהי הפונקציה $\psi(x,y,z,t)$. נאמר שפונקציה זו מקיימת את משוואת הגלים אם היא מקיימת את המשוואה הבאה: $\nabla^2\psi = \frac{1}{{v_p}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, כאשר v_p הוא קבוע.

משפט - תנאי מספיק לכך שפונקציה פותרת את משוואת הגלים

תהי הפונקציה $\psi = \psi(s)$ כך שמתקיים $s = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$, כאשר $\omega, \vec{k}$ הם קבועים, אזי מתקיים:

ψ היא פתרון משוואת הגלים, וגם: $v_p = \frac{\omega}{|\vec{k}|}, \hat{v}_p = \hat{k}$

שאלה 1

א) אלו מן הפונקציות הבאות מתארת גל? קבע מהו כיוון ההתקדמות, ומהי מהירות הפאזה:

1. $f_1(x,y,z,t) = \exp\left[i\left(ax+by-cz-wt\right)\right]$
2. $f_2(x,y,z,t) = \exp\left[-\left(ax-ut\right)^2\right]$
3. $f_3(x,y,z,t) = \exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]$

ב) עבור הפונקציה $f_4(x,y,z,t) = \exp\left[i\left(ax+ut\right)\right]\cdot\exp\left[-\left(ax+vt\right)^2\right]$ קבע מהו התנאי על u,v

כך ש- f_4 תתאר גל.

תשובה 1

א)

1. נתונה הפונקציה הבאה: $f_1(x,y,z,t) = \exp\left[i\left(ax+by-cz-wt\right)\right]$

הביטוי $ax+by-cz-wt$ הוא מהצורה $s = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$, ולכן פונקציה זו היא גל: $f_1 = e^{is}$.

$k = \left(a,b,-c\right)$, ואז $v_p = \frac{w}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. כיוון התקדמות הגל הוא $\hat{k}$.

2. נתונה הפונקציה הבאה: $f_2(x,y,z,t) = \exp\left[-\left(ax-ut\right)^2\right]$

פונקציה זו היא מהצורה $f_2(x) = e^{-s^2}$, ולכן גם פונקציה זו מתארת גל.

3. נתונה הפונקציה הבאה: $f_3(x,y,z,t) = \exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]$.

במקרה זה המקדם של t אינו קבוע, ולכן הפונקציה איננה מקיימת את המשפט. לכן, הדרך לגלות האם פונקציה זו היא גל או לא היא לגזור אותה ולהציב במשוואת הגלים. צריך להתקיים:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f=\frac{1}{{v_p}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f$$

ולכן:

$$f_3(x,y,z,t)=\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_3=ai\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]\qquad\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_3=-a^2\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f_3=-ti\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]\qquad\frac{\partial^2}{\partial y^2}f_3=-t^2\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_3=-iy\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]\qquad\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_3=-y^2\exp\left[i\left(ax-yt\right)\right]$$

ומכאן נקבל:

$$\nabla^2 f_3=-\left(a^2+t^2\right)f_3\quad\Rightarrow\nabla^2 f_3=\left(\frac{a^2+t^2}{y^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_3$$

הביטוי בסוגריים תלוי ב- t וב- y , ולכן f_3 איננה מתארת גל.

ב)

$$f_4(x,y,z,t)=\exp\left[i\left(ax+ut\right)\right]\cdot\exp\left[-\left(ax+vt\right)^2\right]=\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}=\left(ia-2a^2x-2vta\right)\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}=\left(ia-2a^2x-2vta\right)^2\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]-2a^2\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial t}=\left(iu-2vax-2v^2t\right)\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial t^2}=\left(iu-2vax-2v^2t\right)^2\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]-2v^2\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]$$

$$=\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]\left[\left(iu-2vax-2v^2t\right)^2-2v^2\right]$$

$$\nabla^2 f_4=\exp\left[i\left(ax+ut\right)-\left(ax+vt\right)^2\right]\left[\left(ia-2a^2x-2vta\right)^2-2a^2\right]$$

$$\nabla^2 f_4=\frac{\left[\left(ia-2a^2x-2vta\right)^2-2a^2\right]}{\left[\left(iu-2v^2t-2vax\right)^2-2v^2\right]}\cdot\frac{\partial^2 f_4}{\partial t^2}$$

<u>שאלה 2</u>

גל נתון על ידי החלק הממשי של $\psi_1 = A\exp\left[i\left(wt-ax-by\right)\right]$.

א) מהו כיוון ההתקדמות של הגל? מהו אורך הגל?

הגל פוגע במישור ניצב לכיוון ההתקדמות $ax+by=0$ ומוחזר החזרה מלאה.

ב) מהי פונקצית הגל שמתקבל מסופרפוזיציה של הגל הפוגע והמוחזר?

ג) מהו אורך הגל?

ד) מהם המישורים עליהם מתאפסת פונקצית הגל לכל t? מהו המרחק בין שני מישורים עוקבים?

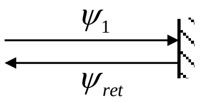
<u>תשובה 2</u>

א)

כיוון התקדמות הגל: $\vec{k}=\left(a,b,0\right)$, וזאת כי $\psi_1 = A\exp\left[i\left(wt-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$.

אורך הגל: $\left|\vec{k}\right| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ב)



$$\psi_1 = A\exp\left(i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right)$$

$$\psi_{ret} = B\exp\left(i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi\right)\right)$$

$$\psi = \psi_1+\psi_{ret}$$

$$\psi(ax+by=0,t)\equiv 0 \Rightarrow \psi_1(ax+by=0,t)+\psi_{ret}(ax+by=0,t)\equiv 0 \Rightarrow$$

$$Ae^{i\omega t}-Be^{i(\omega t+\phi)}=0 \Rightarrow A=B,\phi=\pi \qquad \left(e^{i\pi}=-1\right)$$

$$\Rightarrow \psi_{ret} = A\exp\left(i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\pi\right)\right)$$

$$\psi = \psi_1+\psi_{ret} = A\exp\left(i\omega t\right)\cdot\left[\exp\left(-i\left(ax+by\right)\right)-\exp\left(i\left(ax+by\right)\right)\right]=$$

$$=-2iAe^{i\omega t}\sin\left(ax+by\right)$$

כלל אצבע: גל הפוגע במשטח הופך פאזה.

ג)

אורך הגל איננו משתנה. $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ד)

$$\psi \equiv 0 \Rightarrow \sin\left(ax+by\right)=0$$

ולכן כל המישורים עליהם מתאפסת הפונקציה מקיימים: $ax+by=\pi n$.

המרחק בין שני מישורים עוקבים: $d=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\lambda}{2}$

שאלה 3

נתונה פונקציית הגל $\varphi = A\exp\left[i\left(kx-wt\right)\right]$ שהיא פתרון של משוואת הגלים $\nabla^2\varphi = \frac{n(\omega)2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi$ כאשר $n(\omega)$ נתון על ידי $n(\omega)=\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$.

מהי מהירות הפאזה? מהי מהירות החבורה? מהי מהירות החבורה בגבול $\omega \to 0$?

תשובה 3

מהירות הפאזה נתונה על ידי $v_p = \frac{\omega}{k}$. **מהירות החבורה** נתונה על ידי $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$.

נציב את φ במשוואת הגלים ונקבל:

$$-k^2\exp\left(i\left(kx-wt\right)\right) = \left(\frac{n(\omega)}{c}\right)^2 - \left(\omega^2\right)\exp\left[i\left(kx-\omega t\right)\right]$$

כלומר:

$$k^2\left(\frac{n(\omega)}{c}\right)^2\omega^2$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$$

מהירות החבורה:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{\frac{\partial k}{\partial\omega}}$$

$$k = \frac{n(\omega)}{c}\omega = \frac{1}{c}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\omega = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2}+\frac{\omega^4}{\omega_0^2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial\omega} = \frac{1}{c}\frac{2\omega+4\frac{\omega^3}{\omega_0^2}}{2\cdot\sqrt{\omega^2}+\frac{\omega^4}{\omega_0^2}} = \frac{1}{c}\frac{\omega+2\frac{\omega^3}{\omega_0^2}}{\sqrt{\omega^2}+\frac{\omega^4}{\omega_0^2}}$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \left(\frac{\sqrt{\omega^2}+\frac{\omega^4}{\omega_0^2}}{\omega+2\frac{\omega^3}{\omega_0^2}}\right)\cdot c$$

מתקיים: $v_g \to c$ עבור $w \to 0$.

הרצאה 27 – חבורת גלים, עקרון הוגינס

חבורת גלים

תווך נפיצה הוא תווך שבו ω לא תלויה ליניארית ב- k אלא יש ביניהם תלות אחרת.
תווך לא נפיצה הוא תווך בו ω תלויה ליניארית ב- k, למשל $\omega = vk$. ריק הוא דוגמא טובה לתווך כזה. רוב התווך הינם נפיצים.
נכנה תווך נפיצה בשם **חומר דיספרסיבי**, ותווך לא נפיצה בשם **תווך לא דיספרסיבי**.

לקחו תחום תדרים מסוים כאשר הפרש בין תדר לתדר זהה והם נעים יחד ויוצרים חבורת גלים. לגלים אלו (סופרפוזיציה) ישנה מהירות חבורה v_g. כלומר - יש בידינו "חבילת גלים" הנעה יחדיו, שניתן להתייחס אליה כממורכזת סביב גל k_1 עם אמפליטודה A_k.

$$\psi(x,t) = A(x,t)e^{i(k_1x-\omega_1t)} = \int_{-\infty}^{\infty} A_x e^{i\left[(k-k_1)x-(\omega-\omega_1)t\right]} \cdot e^{i(k_1x-\omega_1t)}dk$$

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_x e^{i\left[(k-k_1)x-(\omega-\omega_1)t\right]}dk$$

אם הגלים מצופפים מאוד, אז בקירוב ω תלויה ליניארית ב- k, ואז נגדיר את **מהירות החבורה** נתונה על ידי $v_g = \dfrac{\partial\omega}{\partial k}$. כמו כן, **מהירות הפאזה** נתונה על ידי $v_p = \dfrac{\omega}{k}$.

משפטים ידועים

1. בריק מתקיים: $v_{group} = v_{phase} = c$.
2. $\Delta k\Delta x \ge 2\pi, \Delta\omega\Delta T \ge 2\pi$, כאשר $\Delta\omega$ זהו רוחבה הספקטראלי של החברה, Δt זהו רוחבה הזמני של חבורת הגלים, Δk רוחב תחום ווקטורי הגל, Δx זהו רוחבה המרחבי של החבורה, n מקדם השבירה של החומר.

עקרון הוגינס

עקרן זה מציע התייחסות לסדקים כאל מקורות אור נקודתיים של גלים בעלי אמפליטודה זהה (אותו ω ואותו k). חישוב הגל הנעקף מתבצע על ידי סופרפוזיציה של כל המקורות הנקודתיים.

תרגול 13

שאלה 1

נתון השדה החשמלי של גל אלקטרומגנטי בריק: $\vec{E}(x,y,z,t)=E_0\hat{z}\cos\left[-ax+by-\omega t\right]$.

א. מהו כיוון ההתקדמות?
ב. מהו אורך הגל? מה התדירות?
ג. מצא את השדה המגנטי, הראה כי $\hat{k}\times\vec{E}=\vec{B}$.
ד. מצא את וקטור פוינטינג.
ה. חשב את עוצמת האור (הספק ליחידת שטח) על המישור $y=0$.

תשובה 1

א. כיוון ההתקדמות: $\vec{k}=\left(-a,b,0\right)\Leftarrow\hat{k}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(-a,b,0\right)$.

ב. אורך הגל: $\lambda=\frac{2\pi}{\left|\vec{k}\right|}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}$. תדירות: $\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{c\left|\vec{k}\right|}{2\pi}=\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi}$.

ג. השדה המגנטי:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-c\nabla\times\vec{E}=-\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \underbrace{E_x}_{=0} & \underbrace{E_y}_{=0} & E_z\end{vmatrix}=-c\left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial y}E_z+\hat{y}\left(-\frac{\partial}{\partial x}E_z\right)\right]=$$

$$=-c\left[-bE_0\sin\left(-ax+by-\omega t\right)\hat{x}-aE_0\sin\left(-ax+by-\omega t\right)\right]$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=c\cdot\left(b\hat{x}+a\hat{y}\right)E_0\sin\left(-ax+by-\omega t\right)$$

$$\vec{B}=\frac{c}{\omega}\left(b\hat{x}+a\hat{y}\right)E_0\cos\left(-ax+by-\omega t\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\hat{x}+a\hat{y}\right)E_0\cos\left(-ax+by-\omega t\right)$$

$$\hat{k}\times\vec{E}=\frac{1}{\left|\vec{k}\right|}\vec{k}\times\vec{E}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -a & b & 0\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\frac{\hat{x}bE_z+\hat{y}aE_z}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\hat{k}\times\vec{E}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\hat{x}+a\hat{y}\right)E_0\cos\left(-ax+by-\omega t\right)=\vec{B}$$

ד. ווקטור פוינטינג:

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\hat{k}\times\vec{E}=\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)\hat{k}-\left(\vec{E}\cdot\hat{k}\right)\hat{k}$$

$$\vec{E}=E_z\hat{z} \qquad \hat{z}\cdot\hat{k}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\hat{z}\cdot\left(-a\hat{x}+b\hat{y}\right)\right)=0$$

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}E^2\hat{k}=\frac{c}{4\pi}E_0^2\cos^2\left(-ax+by-\omega t\right)\cdot\frac{\left(-a\hat{x}+b\hat{y}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ה. עוצמת האור של המשטח:

$$I=\left\langle S\cdot\hat{n}\right\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(S\cdot\hat{n}\right)dt$$

עבור המישור $y=0$, מתקיים כי $\hat{n}=\hat{y}$.

$$\vec{S}\cdot\hat{n}=\frac{c}{4\pi}E_0^2\cos^2\left(-ax-\omega t\right)\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

פיתוח עזר: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\cos^2\left(\omega t+\varphi\right)\right)dt=\frac{1}{2}$

$$I=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(S\cdot\hat{n}\right)dt=\frac{c}{8\pi}\cdot E_0^2\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c}{8\pi}\cdot E_0^2\cdot\cos^2\theta$$

כאשר θ זו הזווית בין $\hat{k}$ לציר y .

<u>הערה</u>

מתקיים כי $\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=0$, כאשר u היא צפיפות האנרגיה האלקטרומגנטית (ניתן להוכיח).

עבור גל אלקטרומגנטי בחומר מתקיים: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=-\vec{J}\cdot\vec{E}}$