

## מבוא לתורת הגרפים צחי אבנור

מסמך זה הורד מהאתר <http://underwar.livedns.co.il>.  
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.  
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

כל הזכויות שמורות לצחי אבנור

Zachi Evenor  
Email: [z-evenor@lycos.com](mailto:z-evenor@lycos.com)  
Home Page: <http://www.tau.ac.il/~bahatgal>

## מבוא לתורת הגרפים

סוכם ע"י צחי אבנור עפ"י הרצאות של פרופסור מיכאל טרסי

### הגדרות ומושגי יסוד

**גרף – הגדרה אינטואיטיבית:** גרף  $G = (V, E)$  היא קבוצה של קודקודים או צמתים  $V$  אשר מחברות ביניהן קשתות מתוך קבוצת הקשתות  $E$ . לכל קשת מתאימים שני קודקודים (לא בהכרח שונים).

**גרף – הגדרה פורמלית:** גרף הוא שלשה  $G = (V, E, f)$  כאשר  $V$  קבוצת הקודקודים,  $E$  קבוצת הקשתות ו  $f$  היא פונקציה  $f: E \rightarrow V \times V$  המתאימה לכל קשת את זוג קודקודי הקצה שלה.

**דיאגרמה של גרף – הגדרה אינטואיטיבית:** ייצוג הגרף ע"י שרטוט. כל קודקוד מיוצג ע"י נקודה או עיגול וכל קשת מיוצגת ע"י קו או חץ המחבר בין שני הקודקודים המתאימים.

**הגדרה – גרף מכוון:** כאשר יש משמעות למהו קודקוד היציאה ומהו קודקוד הכניסה. כלומר, אם קשת מאופיינת באמצעות שני קודקודי הקצה, אזי יש חשיבות לסדר ביניהם. נהוג לייצג קשת מכוונת באמצעות חץ.

**הגדרה – גרף בלתי מכוון:** אין משמעות לסדר הקודקודים, למעשה – כל קשת היא קשת דו-כיוונית.

**הגדרה – קשתות מקבילות:** קשתות תקראנה "מקבילות" אם יש להן את אותן קודקודי קצה.

**הגדרה – קשתות אנטי-מקבילות:** בגרף מכוון, כאשר לקשתות מקבילות יש מגמה הפוכה. כלומר, אותם קודקודי קצה אך בסדר הפוך.

**הגדרה – לולאה:** קשת ששני קודקודי הקצה שלה הם אותו קודקוד. כלומר קשת מקודקוד לעצמו.

**הגדרה – גרף פשוט:** גרף פשוט הוא גרף ללא לולאות וללא קשתות מקבילות.

**הגדרה – חל:** אנו אומרים שקשת  $e$  חלה בקודקוד  $x$  או שקודקוד  $x$  חל בקשת  $e$  אם  $x$  הוא קודקוד קצה של הקשת  $e$ .

**הגדרה – קודקודים סמוכים/מחוברים:** שני קודקודים יקראו סמוכים או מחוברים אם קיימת קשת המחברת ביניהם. כלומר, סמוכים  $x_1, x_2 \Rightarrow \exists e \in E. f(e) = (x_1, x_2)$ .

**הגדרה – דרגה של קודקוד:** יהי  $x$  קודקוד. אזי דרגת הקודקוד הוא מספר הקשתות שחלות ב  $x$  כאשר לצורך העניין, לולאה נספרת פעמיים. בסימונים:  $d(x) = |\{e \in E \mid f(e) = (x, \xi)\} \cup \{e \in E \mid f(e) = (\xi, x)\}|$ .

**הגדרה – דרגת כניסה ודרגת יציאה:** בגרף מכוון דרגת הכניסה  $d^-(x)$  היא מספר הקשתות שנכנסות ל  $x$  ודרגת היציאה  $d^+(x)$  היא מספר הקשתות היוצאות מ  $x$ .

**משפט:** סכום הדרגות בגרף שווה לפעמיים מספר הקשתות. אם  $G = (V, E)$  אזי  $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$ . בגרף

מכוון מתקיים  $\sum_{x \in V} d^+(x) = |E| = \sum_{x \in V} d^-(x)$ . קל לראות ש  $\sum_{x \in V} d(x) = \sum_{x \in V} d^+(x) + \sum_{x \in V} d^-(x) = |E| + |E| = 2|E|$ .

גרפים איזומורפיים, דיאגרמות ומחלקות שקילות של גרפים

**הגדרה – גרפים איזומורפיים:** שני גרפים  $(V, E)$  ו- $(V', E')$  איזומורפיים אם קיימת פונקציה שקילות  $f: V \rightarrow V'$  כך ש  $(a, b)$  הוא קשת ב  $E$  אם ורק אם  $(f(a), f(b))$  הוא קשת ב  $E'$ .

**משפט:** בתורת הגרפים, כל תכונה  $W$  המתקיימת בגרף  $G$  מתקיימת גם בכל הגרפים האיזומורפיים לו.

**הערה:** בעקבות המשפט שלעיל אפשר לדבר על מחלקות השקילות של הגרפים שמושרות עפ"י ההגדרה הקודמת. קל לראות שמחלקות שקילות אלה הן בעצם בדיאגרמות. נהוג (למרות שזה לא נכון פורמלית, אך זה מפשט הרבה את הדיונים) לגנות גם את מחלקת השקילות (הדיאגרמה) בשם "גרף" או "טיפוס גרף".

**הגדרה – תת גרף:**  $G' = (V', E')$  הוא תת גרף של  $G = (V, E)$  אם  $V' \subseteq V$  וגם  $E' \subseteq E$ .

**הגדרה – תת גרף מושרה:**  $G' = (V', E')$  הוא תת גרף מושרה של  $G = (V, E)$  אם  $V' \subseteq V$  וגם  $E' \subseteq E$  כאשר  $E'$  מכילה את כל הקשתות מ  $E$  אשר חלות בקודדי  $V'$ .

**הגדרה – הגרף השלם:** טיפוס הגרף השלם  $K_n$  הוא גרף בעל  $n$  קודקודים כאשר כל 2 קודקודים סמוכים.

**הגדרה – הגרף השלם הזו-צדדי:** טיפוס הגרף  $K_{n,m}$  הוא גרף פשוט שניתן לפרק את קבוצת הקודקודים שלו לאיחוד זר של קבוצות  $V_1$  ו- $V_2$  כך ש  $|V_1| = n$ ,  $|V_2| = m$  ומתקיים ששני קודקודים הם סמוכים אם ורק אם אחד מהם שייך ל  $V_1$  והשני שייך ל  $V_2$ .

**מקרה פרטי של משפט רמזי:** בכל חלוקה של קבוצת הקשתות של  $K_6$  לשתי מחלקות, אחת מהן תכיל את  $K_3$  כתת גרף.

**המקרה הכללי יותר של משפט רמזי:** לכל גרף  $G$  ולכל מספר טבעי  $k$  קיים מספר טבעי  $n$  כך שבכל צביעה של קשתות הגרף השלם  $K_n$  ב  $k$  צבעים יש ב  $K_n$  תת-גרף איזומורפי ל  $G$ , שכל הקשתות שלו באותו צבע.

**משפט:** מספר הקשתות בגרף  $K_n$  הוא  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

מסילות, מעגלים וקשירות – הגדרות ומושגי יסוד

**הגדרה – טיול (Walk):** יהי  $G = (V, E)$  גרף. טיול מקודקוד  $x \in V$  לקודקוד  $y \in V$  הוא סדרה  $(x, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, y)$  של קודקודים וקשתות לסירוגין כאשר משני צדדיה של קשת נמצאים קודקודי הקצה שלה.

**הגדרה – מסילה (מסלול):** מסילה (מסלול) מקודקוד  $x \in V$  לקודקוד  $y \in V$  היא טיול שבו כל קשת לא יכולה להופיע יותר מפעם אחת (תיתכן חזרה על קודקודים).

**הגדרה – אורך מסילה:** האורך הוא מספר הקודקודים המופיעים בה (כולל חזרות, כולל התחלה וסוף).

**הגדרה – מעגל:** מסילה מקודקוד  $x \in V$  לעצמו שמכילה לפחות קשת אחת תיקרא מעגל. כאשר מחשבים את אורך המעגל, קודקוד הקצה נספר רק פעם אחת.

**סימון:** גרף שאפשר לתאר את כולו ע"י מסילה יסומן  $P_n$  כאשר  $P$  מסמן path (מסילה) ו  $n$  הוא אורכה.

**הגדרה – מסילה פשוטה:** מסילה פשוטה היא מסילה שבה כל קודקוד מופיע לכל היותר פעם אחת (למעט במעגל פשוט שבו הקודקוד היחיד שמופיע פעמיים הוא קודקוד ההתחלה/סיום).

**משפט:** כל מעגל אפשר לחלק למעגלים פשוטים.

**הגדרה – תת טיול:** קטע רציף על גבי טיול מקודקוד  $t_1$  לקודקוד  $t_2$  הוא טיול ויקרא תת טיול של הטיול.

**משפט:** קיימת בגרף מסילה פשוטה בין  $x$  ל  $y$  אם ורק אם קיים בגרף טיול הכולל את  $x$  ו  $y$ .

**הגדרה – יחס הקשירות:** נגדיר  $x \sim y$  ל  $x, y \in V$  אם ורק אם קיימת מסילה פשוטה בין  $x$  ל  $y$ .

**משפט:** יחס הקשירות שהוגדר לעיל הוא יחס שקילות.

**הגדרה – רכיבי קשירות:** רכיבי הקשירות של גרף כלשהו  $G$  הם תתי-גרפים של  $G$  המושרים, כל אחד, ע"י מחלקות השקילות של יחס הקשירות  $\sim$  על  $V$ .

**הגדרה – גרף קשיר:** גרף יקרא קשיר אם יש לו רק רכיב קשירות אחד.

**משפט:** בכל גרף, כל רכיב קשירות מהווה תת-גרף קשיר.

### קשירות, מסילות ומשפטי אוילר

**הגדרה – טיול אוילר:** טיול אוילר הוא טיול שעובר דרך כל הקודקודים בגרף.

**הגדרה – מסלול (מסילת) אוילר:** מסלול (מסילת) אוילר היא מסילה שעוברת דרך כל הקודקודים בגרף.

**הגדרה – מעגל אוילר:** מעגל אוילר הוא מעגל שעובר דרך כל הקודקודים בגרף.

**סימון:** גרף שאפשר לתאר את כולו ע"י מסילה יסומן  $P_n$  כאשר  $P$  מסמן path (מסילה) ו  $n$  הוא אורכה. מקובל לקרוא לגרפים כאלה פשוט "מסילה" או "מעגל" (אם הגרף מעגלי).

**משפט:** כל מסילה היא גרף קשיר.

**טענה:** בכל גרף פשוט בעל שני קודקודים לפחות יש שני קודקודים שדרגותיהם שוות.

**משפט 1:** אם  $G$  הינו מעגל (כלומר, הוא מכיל מעגל אוילר) אז דרגת כל קודקוד ב  $G$  זוגית.

**משפט 2:** אם  $G$  הוא גרף שקיימת בו מסילת אוילר שאינה מעגלית, אז יש ב  $G$  בדיוק שני קודקודים שדרגתם היא אי-זוגית.

**מסקנה 1:** במסילה מספר הקודקודים שיש להם דרגה אי-זוגית הוא 0 או 2.  
**מסקנה 2:** אם דרגת כל הקודקודים הנה זוגית, אזי כל מסלול אוילר דרכה חייב להיות מעגל אוילר.  
**מסקנה 3:** אם יש במסילה שני קודקודים שדרגתם אי-זוגית, אזי כל מסלול אוילר דרכה מחבר שני קודקודים אלו (שלכן מקובל לקרוא להם "קצוות המסילה").

**משפט אוילר:** בגרף יש מסלול אוילר (כלומר, הגרף הוא מסילה) אם ורק אם הוא קשיר ומספר קודקודיו שדרגתם אי-זוגית הוא 0 או 2.

**דוגמה:** בגרף הקשרים של קניסברג אין מסלול אוילר.

### עצים ויערות

**הגדרה – יער:** יקרא יער גרף שאין בו מעגלים.

**הגדרה – עץ:** יקרא עץ יער קשיר. כלומר, כל עץ הוא יער. עץ הוא יער קשיר.

**משפט:** בכל גרף  $G$ , שדרגת כל קודקודיו היא לפחות 2, יש מעגל.

**מסקנה:** אם  $G$  יער, אז יש ב  $G$  קודקוד שדרגתו 0 או 1 (אחרת היה ב  $G$  מעגל אחד לפחות).

**הגדרה:** קודקוד שדרגתו 0 נקרא "קודקוד מבודד" ואילו קודקוד שדרגתו 1 נקרא "עלה".

**טענה:** בכל עץ שיש בו יותר מקודקוד אחד יש לפחות 2 עלים.

**משפט:** יהי  $G = (V, E)$  גרף. (1) אם  $G$  יער אזי  $|E| \leq |V| - 1$ . (2) אם  $G$  קשיר אזי  $|E| \geq |V| - 1$ .

**מסקנה:** לכל עץ בעל  $n$  קודקודים יש  $n-1$  קשתות. כלומר, אם  $G = (V, E)$  עץ אזי  $|E| = |V| - 1$ .

**משפט:** מספר הקשתות ביער בעל  $n$  קודקודים ו  $c$  רכיבי קשירות הוא  $|E| = n - c$ .

**הגדרה – עץ פורש:** עץ פורש של  $G$  שנסמנו  $G'$  הוא תת-גרף של  $G$  כך שקבוצת הקודקודים שלהם זהה, וכך ש  $G'$  הוא עץ. כלומר, אם  $G = (V, E)$  אזי  $G' = (V, E')$  וגם  $G'$  הוא עץ.

**משפט:** לגרף  $G$  יש עץ פורש אם ורק אם הוא קשיר.

**למה:** אם קיימים בגרף  $G$  שני קודקודים (לא בהכרח שונים) שיש ביניהם שני מסלולים שונים, אזי יש ב  $G$  מעגל.

**משפט:** גרף  $G$  הינו עץ אם ורק אם בין כל שני קודקודים שלו יש מסלול (מסילה) פשוט יחיד.

**משפט העצים:** יהי  $T$  גרף בעל  $n$  קודקודים. אזי כל הטענות הבאות שקולות:

1. הגרף  $T$  הוא עץ.
2. הגרף  $T$  קשיר וחסר מעגלים.
3. הגרף  $T$  קשיר ובעל  $n-1$  קשתות.
4. הגרף  $T$  חסר מעגלים (כלומר, הוא יער) ובעל  $n-1$  קשתות.
5. הגרף  $T$  הוא חסר מעגלים מקסימלי (כל קשת נוספת תסגור מעגל).
6. הגרף  $T$  הוא קשיר מינימלי (כל קשת שנוספת תהפוך את  $T$  לגרף לא קשיר).
7. כל שני קודקודים  $x$  ו  $y$  הם קצותיה של מסילה יחידה (עד כדי כיוון).
8. בין כל שני קודקודים של  $T$  יש מסלול (פשוט) יחיד (ניסוח אחר של 7).
9. הגרף  $T$  קשיר ובכל תת-גרף של  $T$  יש קודקוד בדרגה 1 או 0.

### עצים מכוונים

**הגדרה – עץ מכוון:** "עץ מכוון" הוא גרף מכוון  $G$ , שיש בו קודקוד  $a$ , הקשור לכל קודקוד של הגרף באמצעות מסלול יחיד. לקודקוד  $a$  קוראים ה"שורש" של  $G$ .

**יחסי היררכיה:** בהינתן שני קודקודים  $x$  ו  $y$  כך ש  $m$   $x$  יוצאת קשת ל  $y$ , אנו אומרים ש  $x$  "הורה" או "אב" של  $y$ . אם יוצא  $m$   $x$  מסלול כלשהו ל  $y$  אנו אומרים ש  $x$  "אב-קדמון" של  $y$  ושקודקוד  $y$  "צאצא" של  $x$ .

**משפט:** יהי  $T$  עץ מכוון עם שורש  $a$ . אזי: **(א)**  $d^+(a) = 0$ . **(ב)**  $d^+(x) = 1$   $\forall x \in V_T, (x \neq a)$ .

**מסקנה:** לכל עץ מכוון יש רק שורש אחד.

**מסקנה:** אם  $T = (V, E)$  (או ברישום אברון -  $G = \langle V, E, F \rangle$ ) הוא עץ מכוון אזי  $|E| = |V| - 1$ .

**טענה 1:** בין כל שני קודקודים של עץ מכוון עש לכל היותר מסלול אחד.

**טענה 2:** בעץ מכוון אין מעגלים.

**משפט:** אם  $G'$  הוא עץ מכוון, אזי הגרף (הלא מכוון) ש  $G'$  מבוסס עליו הוא עץ.

**משפט:** יהי  $T = (V, E)$  עץ (לא מכוון), ויהי  $a \in V$ . אזי קיים עץ מכוון יחיד  $T'$  המבוסס על  $T$  כך שהקודקוד  $a$  הוא השורש שלו.

### נוסחת קיילי למניית עצים

**נוסחת קיילי:** תהי  $V$  קבוצה סופית כך ש  $|V| \geq 2$ . אזי מספר העצים מהצורה  $T = (V, E)$  הוא  $|V|^{|V|-2}$ .

או בסימונים:  $|T(V)| = |V|^{|V|-2} \Rightarrow |V| \geq 2$  כאשר  $T(V)$  היא קבוצת כל העצים שקבוצת קודקודיהם היא  $V$ .

**משפט קיילי:** אם נסמן את מספר העצים הפורשים ל  $K_n$  ב  $|T_n|$  אזי  $|T_n| = n^{n-2}$ .

**סכמת ההוכחה:** נבנה פונקציה שקילות (הפיכה) מקבוצת העצים האמורה לקבוצת המחרוזות באורך  $n-2$  מעל א"ב בגודל  $n$  עם יחס סדר מלא מעליו (לצורך פשטות ובלי הגבלת כלליות – המספרים הטבעיים מ  $1$  עד  $n$  יספיקו ולא יפגמו בכלליות ההוכחה). אנו נבנה את הפונקציה ואת הפונקציה ההפוכה שלה.

**כיוון ראשון – פונקציה (אלגוריתם) ההופכת עץ למחרוזת:**

1. הסר מהעץ את העלה שמספרו הסידורי הוא הקטן ביותר ואת הקשת החלה בו.
2. רשום במחרוזת את הקצה השני של אותה קשת.
3. חזור על פעולות 1 ו 2 לגבי העץ הנותר עד אשר נותר עץ בעל 2 קודקודים וקשת אחת בלבד המחברת ביניהם.

**כיוון שני – פונקציה (אלגוריתם) הבונה עץ ממחרוזת:**

1. חלץ את טבלת הדרגות של הקודקודים מהמחרוזת לפי הכלל הבא: דרגתו של כל קודקוד שווה למספר הופעותיו במחרוזת + 1.
2. מצא את העלה (קודקוד בדרגה 1) שמספרו הסידורי הקטן ביותר וחבר אותו אל הקודקוד שבראש המחרוזת.
3. הסר את ראש המחרוזת. כעת קיבלנו תת-מחרוזת שממנה נבנה את יתר העץ.
4. עדכן בהתאם את טבלת הדרגות: מחיקת העלה וחיסור 1 מדרגת הקודקוד השני.
5. חזור על פעולות 2,3,4 עד אשר יותרו בטבלה 2 קודקודים בדרגה 1.
6. חבר אותם.

**הערות:** נותר להוכיח באינדוקציה שמכל מחרוזת באורך  $n-2$  מעל א"ב סדור בגודל  $n$ , אפילו שנוצרה באקראי, אפשר לבנות עץ כלשהו. מרגע שעשינו זאת, הוכחנו שהפונקציה חח"ע ועל.

בכך הוכחנו שמספר העצים הוא  $|V|^{n-2} \Rightarrow |V| \geq 2$ .

**עוד על גרפים, על מעגלים וקצת על גרפים מישוריים**

**משפט:** גרף הוא איחוד זר בקשתות של מעגלים פשוטים אם ורק אם לכל קודקוד דרגה זוגית.

**הגדרה – דיאגרמה מישורית וגרף מישורי:** דיאגרמה מישורית של גרף היא דיאגרמה שלו במישור כך שכל שתי קשתות אינן נחתכות אלא בקודקוד משותף. כעת, גרף מישורי הוא גרם שיש לו דיאגרמה מישורית.

**משפט ז'ורדן:** העברת גרף במישור מחלקת את המישור לפנים וחוץ נפרדים.

**הגדרה:** בהינתן גרף (דיאגרמה) מישורי, תיקרא "פאה" חלק נפרד של המישור.

**משפט 2 הצבעים:** בדיאגרמה של גרף מישורי שהוא איחוד של מעגלים זרים בקשתות, ניתן לצבוע את כל הפאות ב 2 בצבעים כך שכל 2 פאות שיש להן קשת משותפת צבועות בצבעים שונים.

**נוסחת אוילר:** לגרף מישורי קשיר  $G = (V, E)$  בעל  $f$  פאות מתקיים  $|E| = |V| + f - 2$ .

**הגדרה – גרף משולשי:** יקרא גרף משולשי כל גרף שכל פאותיו בעלות 3 צלעות.

**משפט:** בגרף משולשי קשיר מתקיים  $|E| = 3|V| - 6$ . בגרף מישורי פשוט מתקיים  $|E| \leq 3|V| - 6 \Rightarrow |V| \geq 3$ .