מרחבי מכפלה פנימית

צחי אבנור

Zachi Evenor
Email: z-evenor@lycos.com
Home Page: http://www.tau.ac.il/~bahatgal

אלגברה ליניארית 2 – מרחבי מכפלה פנימית

(סוכם ע"י צחי אבנור ; מרצה: פרופ' אשר בן-ארצי)

1. המכפלה הפנימית – הגדרות ותכונות

הגדרה – מכפלה פנימית של מ"ו U מעל הממשיים: הפונקציה $\langle\_,\_\rangle : V \to \mathbb{R}$ היא מכפלה פנימית אם היא מקיימת את התכונות הבאות: (1) חיוביות: $\forall 0 \neq v \in U. \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0$ ו $\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle = 0$. (2) סימטריות: $\forall v,u \in U. \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$. (3) ליניאריות ברכיב הראשון: $\langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \alpha \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \beta \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle$.

הגדרה – ההצמדה הסטנדרטית: יהי $z = \alpha + \beta i$, אזי $\overline{z} = \alpha - \beta i$ הוא הצמוד.

הגדרה – מטריצה צמודה: תהי $A \in M_n^{(\mathbb{C})}$ אזי המטריצה הצמודה שתסומן ב * מוגדרת $A^* = (\overline{A})^t = \overline{A^t}$.

משפט – תכונות המטריצה הצמודה: (1) A ממשית אם ורק אם $A^* = A^t$. (2) $(A+B)^* = A^* + B^*$. (3) $(A^*)^* = A$. (4) $(AB)^* = B^* A^*$. (5) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$. עבור מטריצות ריבועיות: (6) A הפיכה אם ורק אם A^* הפיכה ואז מתקיים $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (7) $\det A^* = \overline{\det A}$. (8) $trA^* = \overline{trA}$.

הגדרה – מכפלה פנימית של מ"ו U מעל המרוכבים: הפונקציה $\langle\_,\_\rangle : V \to \mathbb{C}$ היא מכפלה פנימית אם היא מקיימת את התכונות הבאות: (1) חיוביות: $\forall 0 \neq v \in U. \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0$ ו $\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle = 0$. (2) הרמיטיות: $\forall v,u \in U. \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$. (3) ליניאריות ברכיב הראשון: $\langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{u} \rangle = \alpha \langle \underline{v}_1, \underline{u} \rangle + \beta \langle \underline{v}_2, \underline{u} \rangle$.

מסקנה: במ"פ מעל המרוכבים מתקיים: $\langle \sum \alpha_i \underline{v}_i, \sum \beta_i \underline{u}_i \rangle = \alpha_i \overline{\beta}_i \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$.

משפט: יהי $u \in U$ וקטור ב ממ"פ (מרחב מכפלה פנימית). אם לכל $v \in U$ מתקיים $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$ אזי $u = 0$.

2. הנורמה – הגדרות ותכונות

הגדרה – נורמה: יהי U ממ"פ עם מכפלה פנימית $\langle\_,\_\rangle$. אזי הנורמה של וקטור מוגדרת $\|\underline{v}\| = +\sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$.

משפט – תכונות הנורמה: (1) חיוביות: $\forall 0 \neq \underline{v} \in U. \|\underline{v}\| > 0$ ו $\|\underline{0}\| = 0$. (2) $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{v}\|$.

הנורמות הסטנדרטיות: $\mathbb{C}^n : \|(z_1,...,z_n)\| = \sqrt{z_1\overline{z}_1 + ... + z_n\overline{z}_n}$ $\mathbb{R}^n : \|(x_1,...,x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

הגדרה: המרחק בין $\underline{u}, \underline{v} \in U$ וקטורים מוגדר להיות $dist(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\|$.

3. וקטורים אורתוגונליים ("ניצבים") והמשלים האורתוגונלי

הגדרה: $\underline{u}, \underline{v} \in U$ יקראו "אורתוגונליים" ויסומן $\underline{u} \perp \underline{v}$ אם $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$.

משפט: (1) סימטריות: $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{u}$. (2) $\underline{u} \perp \underline{u} \Leftrightarrow \underline{u} = 0$. (3) $\forall \underline{v} \in U. \underline{0} \perp \underline{v}$.

משפט: אם $\underline{u} \perp \underline{v}_1, ..., \underline{u} \perp \underline{v}_k$ אזי לכל $\alpha_1,...,\alpha_k \in F$ מתקיים $\underline{u} \perp (\alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_k \underline{v}_k)$.

הגדרה: $\underline{u} \perp V$ אם $\forall \underline{v} \in V. \underline{u} \perp \underline{v}$.

משפט: $\underline{u} \perp V$ אם $\underline{u} \perp \underline{v}_1, ..., \underline{u} \perp \underline{v}_k$ כאשר $span(v_1,...,v_k) = V$ שהיא קבוצה פורשת של V.

הגדרה: המשלים האורתוגונלי של קבוצה V מסומן ומוגדר להיות $V^{\perp} = \{v \in U \mid \underline{v} \perp V\}$.

משפט – תכונות המשלים האורתוגונלי: (1) המשלים האורתוגונלי הוא תת-מרחב. (2) $v\in V^{\perp}\Leftrightarrow v\perp V$.
(3) $\{\underline{0}\}^{\perp}=U$ $\quad U^{\perp}=\{\underline{0}\}$. (4) $V\subseteq(V^{\perp})^{\perp}=V^{\perp\perp}$. (5) $V\cap V^{\perp}=\{\underline{0}\}$. (6) $V+V^{\perp}=V\oplus V^{\perp}$.

משפט "פיתגורס": אם $\underline{v}\perp\underline{u}$ אזי $\|\underline{u}\pm\underline{v}\|^2=\|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2$ ומכאן נסיק ש $\|\underline{u}+\underline{v}\|=\|\underline{u}-\underline{v}\|$.

4. ההיטל האורתוגונלי

הגדרה/משפט: יהי U ממ"פ ויהי $V\subseteq U$ $\quad u\in U$. אזי קיימים וקטורים $u_1\in V^{\perp}$, $u_0\in V$ כך ש $u=u_0+u_1$. זה שקול לומר שקיים וקטור $u_0\in V$ כך ש $u-u_0\in V^{\perp}$. הוקטורים $u_1\in V^{\perp}$, $u_0\in V$ הם יחידים ו u_0 נקרא ההיטל האורתוגונלי של הוקטור u על תת-המרחב V. כמו כן u_1 הוא ההיטל האורתוגונלי של הוקטור u על תת-המרחב $V^{\perp}$.

משפט: בהינתן V ו u, המינימום של הפונקציה $\min_{\underline{x}\in V}\|\underline{u}-\underline{x}\|$ הוא $\underline{x}=\underline{u}_0$ כאשר u_0 הוא ההיטל האורתוגונלי של הוקטור u על תת-המרחב V.

הגדרה: $dist(\underline{u},V)=\min_{\underline{x}\in V}\|\underline{u}-\underline{x}\|=\|\underline{u}-\underline{u}_0\|=\|\underline{u}_1\|=\sqrt{\|u\|^2-\|u_0\|^2}$.

משפט פיתגורס להיטל האורתוגונלי: יהי $V\subseteq U$ $\quad u\in U$ ויהיו $u_1\in V^{\perp}$, $u_0\in V$ כך ש $u=u_0+u_1$. אזי $\|u\|^2=\|u_0\|^2+\|u_1\|^2$.

אי-שוויון נורמת ההיטל האורתוגונלי: $\|u\|\ge\|u_0\|$ או $\cos\theta=\left(\|u_0\|/\|u\|\right)\le 1$ ויש שוויון אם"ם $u\in V$.

משפט – נוסחה למציאת ההיטל על תת מרחב חד-ממדי: יהי $V=span(v)$ ויהי $u\in U$. אזי ההיטל שלו על תת-מרחב זה נתון ע"י $\underline{u}_0=\dfrac{\langle\underline{u},\underline{v}\rangle}{\langle\underline{v},\underline{v}\rangle}\underline{v}=\dfrac{\langle\underline{u},\underline{v}\rangle}{\|\underline{v}\|^2}\underline{v}$.

משפט אי-שוויון קושי-שוורץ: אי-שוויון קושי-שוורץ קובע שלכל $\underline{u},\underline{v}\in U$ מתקיים $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle\le\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$.

5. נוסחאות פולריזציה

משפט: לכל $u,v\in U$, $\|u\pm v\|^2=\|u\|^2\pm 2\operatorname{Re}\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

מסקנה: בהינתן הנורמה אפשר לשחזר את המכפלה הפנימית ע"י

$$\operatorname{Re}\langle\underline{u},\underline{v}\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$$
$$\operatorname{Im}\langle\underline{u},\underline{v}\rangle=\operatorname{Re}(-i\langle\underline{u},\underline{v}\rangle)=\operatorname{Re}\langle\underline{u},i\underline{v}\rangle$$.

משפט – אי שוויון המשולש: ה אשמ"ש קובע שלכל $u,v\in U$, $\|u\pm v\|\le\|u\|+\|v\|$.

למה: יהיו $v_1,\ldots,v_k\in V$ בת"ל ו $c_1,\ldots,c_k\in F$ סקלרים. אזי קיים וקטור יחיד $w\in span\{v_1,\ldots,v_n\}$ כך ש $\langle w,v_k\rangle=c_k$ $\quad\ldots\quad$ $\langle w,v_1\rangle=c_1$.

6. המשלים האורתוגונלי

משפט – תכונות המשלים האורתוגונלי: יהי U ממ"פ במ"ס מעל F ויהי $V\subseteq U$ תת-מרחב. אזי:
(1) $U=V\oplus V^{\perp}$ ולכן (2) $\dim V+\dim V^{\perp}=\dim U$. (3) כמו כן $V^{\perp\perp}=(V^{\perp})^{\perp}=V$.

משפט: כעת יהיו $W_1,...,W_k \subseteq U$ תתי מרחבים של U אזי: (4) $(W_1+...+W_k)^\perp = W_1^\perp \cap ... \cap W_k^\perp$.
(5) $(W_1 \cap ... \cap W_k)^\perp = W_1^\perp + ... + W_k^\perp$. (6) $V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow V_1^\perp \supseteq V_2^\perp$. (7) $V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_1^\perp = V_2^\perp$.

אלגוריתם למציאת המשלים האורתוגונלי: יהיו $v_1,...,v_k \in V$ בת"ל, אזי $V^\perp = \ker A$ כאשר A היא המטריצה ש $v_1,...,v_k \in V$ הן שורותיה. כלומר: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --v_1-- \\ \vdots \\ --v_k-- \end{pmatrix} w \Leftrightarrow w \in \ker A \Leftrightarrow w \in V^\perp$.

הגדרה: יהיו $v_1,...,v_k \in V$ וקטורי בסיס של V, אזי המטריצה $G_{ij}^{[B]} = \begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k,v_1\rangle & \cdots & \langle v_k,v_k\rangle \end{pmatrix}$ נקראת מטריצת גרהאם (או פשוט: מטריצת גרם) של הבסיס B.

משפט: מטריצת גרם הפיכה $\det G_{ij}^{[B]} \neq 0$. מטריצת גרם חיובית בהחלט ולכן מגדירה מכפלה פנימית.

7. קבוצות אורתוגונליות ובסיסים אורתונורמליים

הגדרה: $v_1,...,v_k \in V \subseteq U$ היא קבוצה אורתונורמלית אם $\forall i,j. \langle v_i,v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

משפט: כל שני וקטורים בקבוצה אורתונורמלית הם אורתוגונליים זה לזה. כמו כן, נורמת כל וקטור היא 1.

משפט: כל קבוצה אורתונורמלית היא בלתי-תלויה.

מסקנה: קבוצה אורתונורמלית בעלת $\dim V$ וקטורים היא בסיס ל V.

משפט – תכונות חישוב יסודיות: תהי $v_1,...,v_k \in V$ קבוצה אורתונורמלית ו $\alpha_i, \beta_i \in F$, אזי מתקיים:

1. חילוץ מקדמים: $\forall i=1,...,k.\ \langle \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k, v_i\rangle = \alpha_i$.
2. חישוב מכפלה פנימית: $\langle \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k, \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k\rangle = \alpha_1\overline{\beta_1} + ... + \alpha_k\overline{\beta_k}$.
3. חישוב הנורמה (משפט פיתגורס ב n ממדים): $\|\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k\|^2 = |\alpha_1|^2 + ... + |\alpha_k|^2$.

משפט – מציאת ההיטל האורתוגונלי באמצעות בסיס אורתונורמלי: יהי $v_1,...,v_k \in V$ בסיס אורתונורמלי של V. אזי ההיטל $\underline{u}_0$ של $u \in U$ נתון ע"י $\underline{u}_0 = \langle u,v_1\rangle \underline{v}_1 + ... + \langle u,v_k\rangle \underline{v}_k$.

אי שוויון בסל: לכל $u \in U$ ו $v_1,...,v_k$ אורתונורמלית מתקיים: $\|u\|^2 \geq \|u_0\|^2 = |\langle u,v_1\rangle|^2 + ... + |\langle u,v_k\rangle|^2$.

8. תהליך גרם-שמידט להפיכת בסיס רגיל לבסיס אורתונורמלי

האלגוריתם: יהי $B = \{\underline{v}_1,...,\underline{v}_k\}$ בסיס ל $V = span\{\underline{v}_1,...,\underline{v}_k\}$. נבנה בסיס אורתונורמלי $\underline{u}_1,...,\underline{u}_k$ ל V.

בשלב הראשון ניקח את הוקטור $\underline{v}_1$ וננרמל אותו, כלומר: $\underline{u}_1 = \underline{v}_1 / \|v_1\|$.

בשלב השני נמצא את ההיטל של $\underline{v}_1$ על $span\{\underline{u}_1\}$ וניקח את המשלים. כלומר:
$\underline{w}_2 = v_1 - P_{sp\{u_1\}}(v_1) = \underline{v}_1 - \langle v_2,u_1\rangle \underline{u}_1$. ננרמל את $\underline{w}_2$ ונקבל את הוקטור השני בבסיס: $\underline{u}_2 = \underline{w}_2 / \|w_2\|$.

בשלב ה m-י ($m \leq k$) אנו נמצאים במצב הבא: $span\{\underline{u}_1,...,\underline{u}_{m-1}\} = sp\{\underline{v}_1,...,\underline{v}_{m-1}\}$ כאשר $\underline{u}_1,...,\underline{u}_{m-1}$ קבוצה אורתונורמלית. נמצא את ההיטל של $\underline{v}_m$ על תת-מרחב זה וניקח את המשלים וננרמל, כלומר:
$\underline{w}_m = \underline{v}_m - P_{sp\{m-1\}}(v_m) = \underline{v}_m - (\langle v_m,u_1\rangle \underline{u}_1 + ... + \langle v_m,u_{m-1}\rangle \underline{u}_{m-1})$ ואז $\underline{u}_m = \underline{w}_m / \|w_m\|$.

סיכום: בסוף התהליך מתקבלת בסיס אורתונורמלי $\underline{u}_1,...,\underline{u}_k$ ל V, כלומר: $span\{\underline{u}_1,...,\underline{u}_k\}=sp\{\underline{v}_1,...,\underline{v}_k\}=V$.

הערה 1: בעת ביצוע התהליך אפשר לוותר על הנרמול וכמו כן אפשר לכפול כל וקטור בסקלר על מנת שיהיה לנו נוח לעבוד אתם. בסוף התהליך נקבל $w_1,...,w_k$ אורתוגונליים שפורשים את V. כדי להפכם לבסיס אורתונורמלי עלינו פשוט לנרמל את כולם – וזו פעולה פשוטה ביותר.

הערה 2: תהליך גרם-שמידט ניתן להצגה בצורה מטריציונית באופן הבא: יהיו $v_1,...,v_k$ וקטורי הבסיס המקוריים ויהיו $w_1,...,w_k$ הקבוצה ה אורתוגונלית (לא מנורמלת) המתקבלת מהם, אזי:

$$\begin{pmatrix} --w_1-- \\ \vdots \\ --w_k-- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} --v_1-- \\ \vdots \\ --v_k-- \end{pmatrix}$$

כאשר המטריצה האמצעית משולשית עליונה והפיכה.

הערה 3: את תהליך גרם-שמידט אפשר ליישם בפרט על בסיס B למרחב U כולו וכך לקבל בסיס אורתונורמלי לכל המרחב. כמו כן, התהליך מבטיח לנו את קיומו של בסיס כזה.

9. בסיסים אורתונורמליים ואיזומורפיזם של כל מרחב מכפלה פנימית אל מרחב המכפלה הסקלרית

הגדרה: יהי U ממ"פ במ"ס n. קבוצה $B=\{v_1,...,v_n\}\subset U$ אורתונורמלית שפורשת את U היא בסיס אורתונורמלי למרחב U ומקיימת $\forall i,j.\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$. בסעיף זה $B=\{v_1,...,v_n\}\subset U$ בסיס אורתונורמלי.

סימון: נסמן ב $\underline{x}\bullet\underline{y}=x_1\bar{y}_1+...+x_n\bar{y}_n$ את המכפלה הסקלרית ו ב $\|\underline{x}\|_s^2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ את הנורמה הסקלרית.

סימונים: יהיו $w_2=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ $\quad w_1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ ואז $[w_2]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ $\qquad [w_1]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

חישוב המכפלה הפנימית:

$$\langle w_1,w_2\rangle=\langle \alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n,\beta_1v_1+...\beta_nv_n\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i\langle v_i,v_j\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i\delta_{ij}=\alpha_1\bar{\beta}_1+...+\alpha_n\bar{\beta}_n=([w_2]_B)^*([w_1])_B=[w_1]_B\bullet[w_2]_B$$

חישוב הנורמה: $\|w_1\|=\sqrt{\langle w_1,w_1\rangle}=\sqrt{[w_1]_B^*[w_1]_B}=\sqrt{\alpha_1\bar{\alpha}_1+...+\alpha_n\bar{\alpha}_n}=\sqrt{|\alpha_1|^2+...+|\alpha_n|^2}=\|\underline{w}_1\|_s^2$.

מסקנה: כל מכפלה פנימית היא בעצם מכפלה סקלרית על וקטורי קואורדינטות בבסיס אורתונורמלי כלשהו.

משפט: יהי $w\in U$, אזי הצגתו כצירוף ליניארי של וקטורי בסיס אורתונורמלי B היא יחידה והיא נתונה ע"י $\underline{w}=\langle w,v_1\rangle\underline{v}_1+...+\langle w,v_n\rangle\underline{v}_n$. כלומר: $[w]_B=[w]_{\{v_1,...,v_n\}}=\left(\langle w,v_1\rangle,...,\langle w,v_n\rangle\right)^t$.

מסקנה: $\langle w_1,w_2\rangle=\overline{\langle w_2,v_1\rangle}\langle w_1,v_1\rangle+...+\overline{\langle w_2,v_n\rangle}\langle w_1,v_n\rangle$.

שוויון פרסוול: $\|w\|^2=|\langle w,v_1\rangle|^2+...+|\langle w,v_n\rangle|^2$.

משפט: לכל בסיס (לאו דווקא אורתונורמלי), $w_1=w_2\Leftrightarrow\forall i=1,...,n.\langle w_1,v_i\rangle=\langle w_2,v_i\rangle$.

10. ההעתקה הלינארית (ט"ל) הצמודה

משפט: תהי $T:V\to W$ ט"ל, שניהם ממ"פ במ"ס מעל אותו שדה. אזי קיימת ט"ל יחידה $T^*:W\to V$ כך שלכל $w\in W$, $v\in V$ מתקיים $\langle Tv,w\rangle=\langle v,T^*w\rangle$.

מסקנה חשובה מאוד מהוכחת משפט זה: $\left[T^*\right]_B^C=\left([T]_C^B\right)^*$.

הגדרה: הט"ל $T^*:W\to V$ שקיומה מובטח במשפט לעיל נקראת הטרנספורמציה הצמודה של T.

משפט היחידות: הט"ל הצמודה T^* היא יחידה ותלויה במכפלות הפנימיות של המרחבים.

טענה: תהי $A\in M_n^{(F)}$ מטריצה, ותהי $T_A(v)=Av$ ט"ל שמיוצגת ע"י A. אזי $(T_A)^*=T_{A^*}$.

משפט – תכונות הט"ל הצמודה: (1) $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$. (2) $(T^*)^*=T$. (3) $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$. (4) $(\lambda T)^*=\bar{\lambda}T^*$. עבור ט"ל מ V ל V: (5) A הפיכה אם ורק אם A^* הפיכה ואז מתקיים $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$. (6) $\det T^*=\overline{\det T}$. (7) $\dim\operatorname{Im}T=\dim\operatorname{Im}T^*$.

11. העתקות ומטריצות אוניטריות

הגדרה: תהי $T:V\to W$ ט"ל בין ממ"פ במ"ס מעל אותו שדה. נאמר ש T איזומטריה (שומרת מרחק) אם מתקיים $\forall v\in V.\ \|Tv\|=\|v\|$. דרישה זו שקולה לדרישה הבאה: $\forall v,u\in V.\ \langle Tv,Tu\rangle=\langle v,u\rangle$.

מסקנה: כל ט"ל שהיא איזומטריה שומרת אורך (נורמה) וכן זוויות (מכפלה פנימית).

משפט: תהי T איזומטריה. אזי T חח"ע. כלומר: $\ker T=\{\underline{0}\}$.

טענה: אם $T:V\to V$ ט"ל שהיא איזומטריה אזי היא איזומורפיזם.

הגדרה: תיקרא טרנספורמציה אוניטרית כל $T:V\to W$ ט"ל שהיא גם איזומטריה וגם איזומורפיזם (מספיק לדרוש: איזומטריה ועל). אם השדה הוא $\mathbb{R}$ נאמר ש T היא ט"ל אורתוגונלית.

משפט: (1) אם $T:V\to V$ איזומטריה אזי היא אונטרית. (2) הרכת ט"ל אוניטריות היא גם אוניטרית. (3) ט"ל היא אוניטרית אם ורק אם ההפכית שלה היא אוניטרית. (4) T אוניטרית אם ורק אם T^* אוניטרית.

המשפט היסודי של ההעתקות האוניטריות: תהי $T:V\to V$ ט"ל. אזי כל ארבעת התנאים הבאים שקולים: (1) T אוניטרית. (2) T הפיכה ומתקיים $T^{-1}=T^*$. (3) $T^*T=I_V$. (4) $TT^*=I_W$.

משפט לגבי ערכים עצמיים: אם $\lambda\in F\subseteq\mathbb{C}$ ע"ע של T אוניטרית אזי $|\lambda|=1$.

משפט לגבי הדטרמיננטה: אם T אוניטרית אזי $|\det T|=1$.

הגדרה: מטריצה ריבועית $A\in M_n^{(F)}$ תקרא אוניטרית אם A יוצרת ט"ל אוניטרית ביחס למכפלה הסקלרית.

המשפט היסודי של המטריצות האוניטריות: תהי $A\in M_n^{(F)}$ מטריצה ריבועית. אזי כל ארבעת התנאים הבאים שקולים: (1) A אוניטרית. (2) המטריצה A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=A^*$. (3) קיים $AA^*=A^*A=I_n$. (4) עמודותיה (או שורותיה) של A מהוות בסיס אורתונורמלי של F^n.

מטריצות אורתוגונליות במישור הממשי: מטריצה אורתוגונלית היא מטריצה אוניטרית כאשר השדה הוא $\mathbb{R}$. במרחב הוקטורי $\mathbb{R}$ יש רק שני סוגים של מטריצות אוניטריות: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ותהי A מטריצה אוניטרית (אורתוגונלית). אם $\det A=1$ אזי A היא מטריצת סיבוב בזוית תטה מהצורה $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

אם $\det A=-1$ אזי A היא מטריצת שיקוף סביב הישר $y=(\tan\frac{\theta}{2})x$ מהצורה $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

משפט: יהי B בסיס אורתונורמלי. ט"ל T היא אוניטרית אם ורק אם $[T]_B^B$ היא אוניטרית.

12. העתקות ומטריצות נורמליות

הגדרה: ט"ל $T:V\to V$ (מטריצה $A\in M_n^{(F)}$) נקראת נורמלית אם $T^*T=TT^*$ ($A^*A=AA^*$).

משפט: יהי B בסיס אורתונורמלי. ט"ל T היא נורמלית אם ורק אם $[T]_B^B$ היא נורמלית.

תכונות העתקות ומטריצות נורמליות:

משפט 1: אם T נורמלית אזי: (1) $(T^*)^n=(T^n)^*$. (2) כל הביטויים מהצורה $(T^*)^nT^m$ מתחלפים.

משפט 2: אם T נורמלית אזי $\ker T=\ker T^2=\ker T^4=\ker T^8=....$.

למה: לכל ט"ל $R:V\to V$ מתקיים $\ker(R^*R)=\ker R$.

משפט 3: אם T נורמלית אזי $\ker T^*=\ker T$.

טענה: אם T נורמלית אזי $\|Tv\|=\|T^*v\|\ .\forall v\in V$.

למה: אם T נורמלית ו $W\subset T$ הוא T-שמור (T אינווריאנטי) אזי גם $W^\perp$ הוא T-שמור.

מסקנות לגבי לכסון:

מסקנה 1: ט"ל נורמלית $T:V\to V$ ניתנת ללכסון אם ורק אם הפולינום האופייני $c_T(x)$ מתפצל מעל F.

הערה: מעל $\mathbb{C}$ הפולינום האופייני תמיד מתפצל. מעל $\mathbb{R}$ הוא מתפצל אם ורק אם כל שורשיו ממשיים.

מסקנה 2: תהי T נורמלית. אזי: $v\in V$ ו"ע של T המתאים לע"ע λ אם ורק אם $v\in V$ ו"ע של T^* המתאים לע"ע $\bar{\lambda}$. כלומר: $Tv=\lambda v\Leftrightarrow T^*v=\bar{\lambda}v$.

מסקנה 3: תהי T ט"ל נורמלית. מתקיים, אם v,w הם שני ו"ע של ע"ע שונים אזי הם בלתי תלויים.

משפט הלכסון האוניטרי: אם $T:V\to V$ ט"ל נורמלית ($A\in M_n^{(F)}$ מטריצה נורמלית) כך שהפולינום האופייני שלה מתפצל מעל F אזי קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית (קיימת מטריצה אוניטרית P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^*AP=P^{-1}AP=D$ או באופן שקול $A=PDP^{-1}$).

הגדרה: אומרים ש ל $T:V\to V$ יש לכסון אוניטרי אם קיים בסיס אורתונורמלי של ו"ע עצמיים של T. בסיס זה מלכסן את T. באותו אופן.

מסקנה: מעל $\mathbb{C}$, לכל טרנספורמציה ליניארית (מטריצה ריבועית) יש לכסון אוניטרי.

משפט: כל מטריצה אלכסונית מתחלפת עם הפולינומים שלה ואם המטריצה הצמודה שלה.

מסקנה: אם T ניתנת ללכסון אוניטרי אזי T נורמלית.

הגדרה: תהיינה $A,B\in M_n^{(F)}$ מטריצות. נאמר ש A ו B דומות אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש $A=PBP^{-1}=PBP^*$ או $P^{-1}AP=B=P^*AP$. יחס זה הוא יחס שקילות.

משפט: תהיינה A ו B מטריצות דומות אוניטרית. אזי A נורמלית אם ורק אם B נורמלית.

משפט: תהי $T:V\to V$ מעל ממ"פ במ"ס V. אזי T ניתנת ללכסון אוניטרי אם ורק אם T נורמלית והפולינום האופייני שלה מתפצל מעל השדה F.

מסקנה: מעל $\mathbb{C}$, T ניתנת ללכסון אוניטרי אם ורק אם T נורמלית.

13. מחלקות מיוחדות של העתקות ומטריצות נורמליות

הקדמה: יהי V ממ"פ במ"ס מעל F ותהי $T:V\to V$. בסעיף זה נתאר מחלקות שונות של ט"ל נורמליות.

הגדרה 1: T אוניטרית אם $T^*T=I_V$. אזי כל הע"ע של T מקיימים $|\lambda|=1$.

הגדרה 2: T הרמיטית אם $T^*=T$. אזי כל הע"ע של T הם ממששיים, כלומר $\lambda\in\mathbb{R}$.

הגדרה 3: T אנטי-הרמיטית אם $T^*=-T$. אזי כל הע"ע של T הם מהצורה $i\lambda$ כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$.

הגדרה 4: T מוגדרת חיובית (או "חיובית בהחלט" positive definite) אם $T=T^*$ ולכל $0\neq v\in V$ מתקיים $\langle Tv,v\rangle>0$. אז נסמן T>0. כל הע"ע של T כזו הם חיוביים.

הגדרה 4: T מוגדרת אי-שלילית אם $T=T^*$ ולכל $v\in V$ מתקיים $\langle Tv,v\rangle\geq 0$. כל ע"עיה אי-שליליים.

הערה: באותו אופן אפשר להגדיר גם מחלקות של מטריצות נורמליות.

משפט 1: אם B בסיס אורתונורמלי של V ו $T:V\to V$ אזי T שייכת למחלקה מסוימת אם ורק אם $[T]_B^B$ שייכת למחלקה המתאימה. מטריצה $A\in M_n^{(F)}$ שייכת למחלקה מסוימת אם ורק אם הט"ל הנוצרת ע"י A, $T_A:F^n\to F^n$ היא נורמלית ביחס למכפלה הסקלרית ושייכת למחלקה המתאימה.

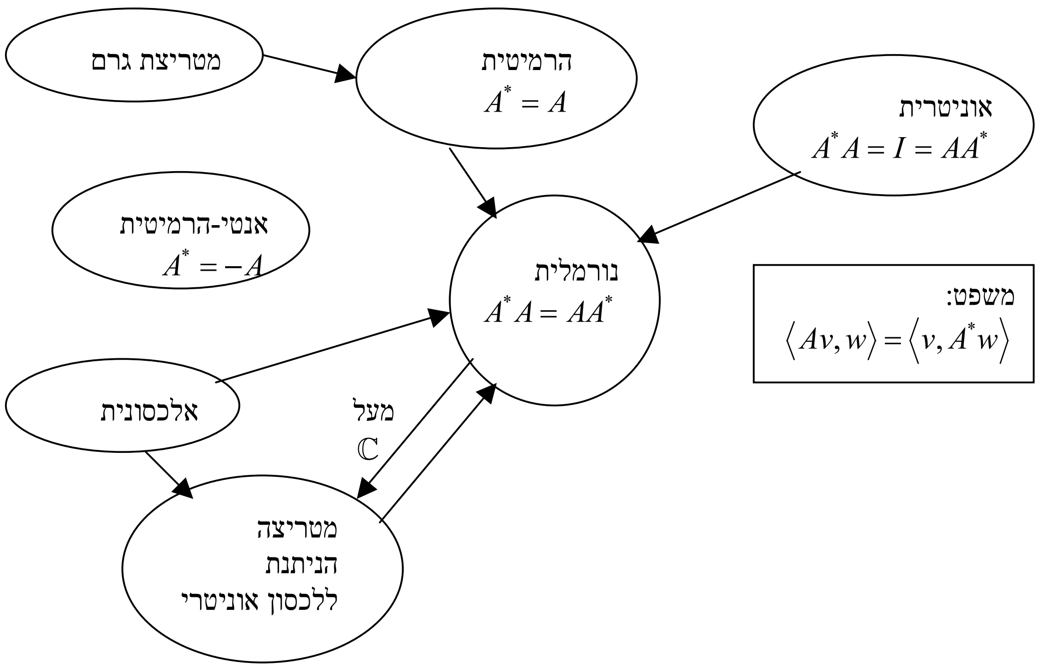
משפט 2: נניח ש A ו B דומות אוניטרית. אזי A שייכת למחלקה מסוימת אם ורק אם B שייכת למחלקה המתאימה. כלומר, השייכות למחלקה היא אינווריאנטית תחת דמיון אוניטרי (ובפרט תחת לכסון אוניטרי).

משפט 3: תהי $D=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ מטריצה אלכסונית. אזי: (1) D נורמלית. (2) D אוניטרית אם ורק אם $\forall i.|\lambda_i|=1$. (3) D הרמיטית אם ורק אם $\forall i.\lambda_i\in\mathbb{R}$. (4) D אנטי-הרמיטית אם כל ערכיה העצמיים דימיוניים (ואין בהם רכיב ממשי). (5) D מוגדרת חיובית אם כל ערכיה העצמיים חיוביים.

משפט 4: מטריצה נורמלית A שייכת למחלקה מסוימת אם ורק אם קיים לה לכסון אוניטרי והמטריצה האלכסונית שדומה לה אוניטרית שייכת לאותה מחלקה (ואת זה אפשר לקבוע לפי משפט 3).

14. דיאגרמת מטריצות (סיכום ביניים)

בדיאגרמה הבאה נסכם את כל הקשרים בין המטריצות החדשות שהכרנו:



15. מטריצות נורמליות ממשיות

משפט: כל מטריצה $A \in M_n^{(\mathbb{R})}$ נורמלית דומה אורתוגונלית למטריצה מהצורה:

$$M_I = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{matrix}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} \alpha_t & \beta_t \\ -\beta_t & \alpha_t \end{matrix}} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \boxed{\gamma_1} & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{\gamma_s} \end{pmatrix}$$

כאשר $\alpha_1,\dots,\alpha_t \in \mathbb{R}$, $\beta_1,\dots,\beta_t \in \mathbb{R}$, $\gamma_1,\dots,\gamma_s \in \mathbb{R}$ ו- $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - \beta_1 i$, $\vdots$, $\lambda_t = \alpha_t + \beta_t i$, $\overline{\lambda_t} = \alpha_t - \beta_t i$, γ_1, $\vdots$, γ_s הע"ע של M.

סדרת הע"ע של M היא גם של A ולכן נקבעת ביחידות, כולל הריבויים.

למה: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ דומות אורתוגונלית כי $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

משפט: המחלקות של מטריצות אנטי-סימטריות ואורתוגונליות, וגם של המוגדרות חיובית והיובית-ממש נשמרות תחת דמיון אורתוגונלי מעל הממשיים.

משפט: A אנטי-סימטרית אם ורק אם A דומה למטריצה מהצורה $M_{II} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & \beta_k \\ -\beta_k & 0 \end{matrix}} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

קל לראות ש $M^t = -M$ ושכל הע"ע של M או אפס או מדומים ($\beta_k \cdot i$). כמו כן, באלכסון יש רק אפסים או בלוקים (k = מספר הבלוקים) מהצורה המוקפת במסגרת כאשר גם באלכסון של כל בלוק יש רק אפסים.

מסקנה: אם A אנטי-סימטרית, אזי בהכרח דרגתה זוגית. הסיבה: $rankA = rankM = 2k$.

משפט: A אורתוגונלית אם ורק אם A דומה למטריצה מהצורה הבאה (כל האיברים נמצאים על האלכסון):
$M_{III} = diag\left(\boxed{\begin{matrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix}},\dots,\boxed{\begin{matrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{matrix}},1,\dots,1,-1,\dots,-1\right)$. לבלוק $\boxed{\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix}}$ קוראים בלוק סיבוב והוא מסובב את המישור המתאים בזווית θ. ה 1 הם זהות ו -1 הם שיקופים.

מטריצות סיבוב במרחב הממשי: המטריצה/ט"ל $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ תיקרא מטריצת סיבוב בזווית θ סביב $v_{i(a_{ii}=1)}$ אם היא מהצורה M שלעיל והיא מכילה לפחות 1 אחד באלכסון, שיקרא ציר הסיבוב.

הגדרה: ציר הסיבוב הוא וקטור שנשאר אינווריאנטי תחת סיבוב.

הגדרה: מטריצת סיבוב R_θ תיקרא סיבוב נאות proper rotation אם $\det R_\theta = 1$.

משפט אוילר: לכל סיבוב נאות יש ציר סיבוב.

16. חפיפה של מטריצות

הגדרה: תהיינה $A,B\in M_n^{(F)}$. נאמר ש A חופפת ל B אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $B=P^tAP$.

משפט: יחס החפיפה הוא יחס שקילות.

מסקנה: אם A ו B דומות אורתוגונלית אזי הם גם דומות וגם חופפות שכן $P^t=P^{-1}$.

למת הנרמול: תהא $A=\lambda I$, אזי A חופפת ל I כי $I=(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}I)^tA(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}I)$. ■

משפט: תהי A מטריצה אנטי-סימטרית. אזי A חופפת למטריצה מהצורה $B=diag\left(\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}},...,\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}},0,...,0\right)$

ו B נקבעת באופן יחיד כי מספר הבלוקים $\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}}$ שווה למחצית הדרגה של A.

הוכחה: ראינו ש A דומה אורתוגונלית (ובפרט חופפת) למטריצה M_{II}, אזי מאחר ש $P^t=P^{-1}$ נובע ש $B=D^tMD=D^t\left(P^tAP\right)D=(PD)^tA(PD)$ כאשר D מטריצה אלכסונית שמנרמלת את הגדלים. ■

משפט סילבסטר: תהי $A\in M_n^{(\mathbb{R})}$ מטריצה סימטרית. אזי A חופפת למטריצה מהצורה $M_{IV}=diag(1,...,1,-1,...,-1)$ ואם נסמן את כמות ה 1 ב π_+ (וזהו מספר הע"ע החיוביים של A כולל ריבויים), ואת כמות ה -1 ב- π_- (מספר הע"ע השליליים של A כולל ריבויים) ואת כמות ה 0 לאורך האלכסון ב π_0, אזי שלושת מספרים אלה נקבעים באופן יחיד.

משפט 1: $\pi_0=\dim\ker A$, $\pi_++\pi_-=rankA$.

הגדרה: תהי $A\in M_n^{(\mathbb{R})}$ מטריצה סימטרית. נאמר ש A "מוגדרת חיובית" (או חיובית או חיובית בהחלט) אם לכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $v^tAv>0$. זה שקול לדרישה ש A מגדירה מכפלה פנימית.

הגדרה: סדר החיובית של A הוא המספר הבא: $\max\left\{\dim W\mid\forall w\in W.w^tAw>0\right\}$. כלומר, סדר החיובית הוא הממד המקסימלי של תת-מרחב W שהצמצום של A עליו "מוגדרת חיובית" (חיובית בהחלט).

משפט 2: סדר החיוביות של מטריצות סימטריות נשמר תחת יחס החפיפה.

17. תבניות בי-ליניאריות

הערה: בסעיף זה נשתמש בהסכם הסכימה של איינשטיין: כאשר אינדקס מופיע פעמיים במכפלה, הכוונה היא שסוכמים על אותו אינדקס (כלומר, הוא אינדקס אילם).

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. תבנית בי-ליניארית (או בקיצור: תבנית) מעל V היא פונקציה $f:V\times V\to\mathbb{R}$ שמקיימת את התכונות הבאות:

(1) ליניאריות ברכיב ראשון: $f(\alpha v_1+\beta v_2,u)=\alpha f(v_1,u)+\beta f(v_2,u)$. $\forall v_1,v_2,u\in V$.

(2) ליניאריות ברכיב שני: $f(v,\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha f(v,u_1)+\beta f(v,u_2)$. $\forall u_1,u_2,v\in V$.

משפט: לכל תבנית בי-ליניארית אפשר להתאים מטריצה שתייצג אותה. אם $B=(v_1,...,v_n)$ בסיס אזי נסמן $[f]_B=\begin{pmatrix}f(v_1,v_1)&\cdots&f(v_1,v_n)\\\vdots&\ddots&\vdots\\f(v_1,v_n)&\cdots&f(v_n,v_n)\end{pmatrix}$ ומתקיים הקשר הבא: $f(u,w)=[u]_B^t[f]_B[w]_B$.

הוכחה: נרשום $w=\beta_i v_i \quad u=\alpha_i v_i$ ואז

$$f(u,w)=f(\alpha_i v_i,\beta_j v_j)=\alpha_i\beta_j f(v_i,v_j)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\left[f(v_i,v_j)\right]_{ij=11}^{nn}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=[u]_B^t[f]_B[w]_B\ . \blacksquare$$

הגדרה: תבנית f סימטרית אם $\forall u,v\in V. f(u,v)=f(v,u)$. f אנטי-סימטרית אם $\forall u,v\in V. f(u,v)=-f(v,u)$.

משפט: תבנית בי-ליניארית f סימטרית (אנטי-סימטרית) אם ורק אם $[f]_B$ כאשר B בסיס כלשהו, סימטרית (אנטי-סימטרית).

מעבר בין בסיסים: תהי $S=[id]_C^B$ מטריצת המעבר בין בסיסים B ל C, כלומר: $[v]_C=[id]_C^B[v]_B$, אזי $[f]_B=S^t[f]_C S$.

הוכחה: לכל $v\in V$ $[v]_B^t[f]_B[v]_B=f(v,v)=[v]_C^t[f]_C[v]_C=\left(S[v]_B\right)^t[f]_C S[v]_B=[v]_B^t\left(S^t[f]_C S\right)[v]_B$

ולכן, אם ניקח $v=e_1,\dots,v=e_n$ נקבל ש $[f]_B=S^t[f]_C S$ כנדרש. $\blacksquare$

מסקנה: קבוצת כל המטריצות שמייצגות תבנית בי-ליניארית מסוימת מהווה מחלקת שקילות ביחס השקילות של חפיפת מטריצות.

משפט: תהי $f:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בי-ליניארית כאשר $\dim V=n$ סופי. אזי:

(1) אם f סימטרית קיים בסיס B כך ש $[f]_B=diag\left(\overbrace{1,\dots,1}^{\pi_+},\overbrace{-1,\dots,-1}^{\pi_-},\overbrace{0,\dots,0}^{\pi_0}\right)$ ו π_+,π_-,π_0 נקבעים באופן יחיד.

(2) אם f אנטי-סימטרית קיים בסיס C כך ש $[f]_C=diag\left(\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}},\dots,\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}},0,\dots,0\right)$.

מסקנה: תבנית מגדירה מכפלה פנימית על V אם ורק אם היא סימטרית ו $\pi_+=n=\dim v,\ \pi_-=\pi_0=0$.

אלגוריתם Schaum למציאת בסיס שבו תבנית בי-ליניארית סימטרית היא אלכסונית:

דרישות: תהי $f:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בי-ליניארית סימטרית ותהי $A=[f]_E=\left[f(v_i,v_j)\right]_{i,j}^n$ המטריצה של f בבסיס הסטנדרטי (A סימטרית). נמצא בסיס K כך ש $[f]_K$ אלכסונית ונמצא גם אותה.

השיטה: נרשום $(A\,|\,I)$. נבצע רצף פעולות אלמנטריות על שורות A ואז את אותו רצף פעולות אלמנטריות רק על עמודות A, בעוד שעל I נבצע סימולטנית רק את הפעולות האלמנטריות על השורות.

התוצאה: נסמן $(A\,|\,I)\to(D\,|\,P^t)$ כאשר D אלכסונית ו P הפיכה. אזי מתקיים: $D=P^tAP$ וכמו כן נסיק את המסקנות הבאות: $D=[f]_K$ ועמודות P הן איברי הבסיס K. $\blacksquare$

דוגמה: תהי $A=[f]_E=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&-4\\-3&-4&8\end{pmatrix}$. נקבל ש $[f]_K=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$ כאשר $K=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ כי:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-3&1&0&0\\2&5&-4&0&1&0\\-3&-4&8&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{C_2\to C_2-2C_1\\ C_3\to C_3+3C_1}]{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3+3R_1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&2&-1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_3\to C_3-2C_2]{R_3\to R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-5&7&-2&1\end{array}\right)$$

18. תבניות ריבועיות

הגדרה: תהי $f:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בי-ליניארית סימטרית. נסתכל על הפונקציה $q:v\to f(v,v)$ כך ש $\forall v\in V.\ q(v)=f(v,v)$. אזי $q:V\to\mathbb{R}$ תיקרא תבנית ריבועית על V המתאימה ל f.

נוסחת הפולריזציה: $f(u,v)=\frac{1}{2}\left[f(u+v,u+v)-f(u,u)-f(v,v)\right]$.

משפט: כל מטריצה סימטרית $A\in M_n^{(\mathbb{R})}$ מגדירה תבנית ריבועית ע"י $q(v)=v^tAv=[v]_E^t[f]_E[v]_E$.

הצגת תבנית ריבועית כסכום: $q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j$ כאשר $v=(x_1,\ldots,x_n)$ הוא וקטור.

משפט (ייצוג מטריציוני של תבנית ריבועית): תהי $q(a)=b_{ij}x_ix_j$ בצורת רישום של סכום מפורש (כלומר, כל מכפלה של x_ix_j מכונסת כך ש b_{ij} הוא המקדם של x_ix_j ו x_jx_i, כלומר $b_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$). אזי המטריצה A שמתאימה ל q בבסיס סטנדרטי היא סימטרית ומקדמיה מקיימים: $a_{ij}=a_{ji}=\frac{1}{2}b_{ij}$, $a_{ii}=b_{ii}$.

דוגמה: המטריצה שמתאימה ל $q(x,y,z)=x^2-2yz+6xz-7z^2$ היא $A_{q(v)}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&-1\\3&-1&-7\end{pmatrix}$.

19. תכונות נוספות של תבניות בי-ליניאריות ודרגתן

הגדרה: הדרגה של תבנית בי-ליניארית היא הדרגה של המטריצה $[f]_B$ כאשר B בסיס כלשהו.

משפט: מעל הממשיים, כל תבנית סימטרית חופפת ל $[f]_B=diag\left(\overbrace{1,\ldots,1}^{\pi_+},\overbrace{-1,\ldots,-1}^{\pi_-},\overbrace{0,\ldots,0}^{\pi_0}\right)$ וכל תבנית אנטי-סימטרית חופפת ל $[f]_C=diag\left(\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}},\ldots,\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}},0,\ldots,0\right)$.

מסקנה: הדרגה של תבנית בי-ליניארית אנטי-סימטרית היא תמיד זוגית!

הגדרה: תבנית תיקרא מנוונת אם $rank[f]_B=rank(f)<\dim V$.

טענה: תהי f תבנית בי-ליניארית על ממ"פ במ"ס V ויהי $W\subseteq V$ התת-מרחב הבא: $W=\{w\in V\mid \forall v\in V.\ f(w,v)=0\}$. אזי $rank(f)=\dim V-\dim W$.