

משפטים חשובים בחזו"א 2 צחי אבנור

מסמך זה הורד מהאתר <http://underwar.livedns.co.il>.
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

המסמך מבוסס על הרצאות של מר מרדכי אפשטיין ותרגולים של ליאור ברי, תשס"ג

כל הזכויות שמורות לצחי אבנור

Zachi Evenor
Email: z-evenor@lycos.com
Home Page: <http://www.tau.ac.il/~bahatgal>

משפטים חשובים בחזו"א 2 סוכם ורוכז ע"י צחי אבנור

תורת הטורים המספריים

הגדרות ומושגים בסיסיים:

הגדרה (טמ1): תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ממשית. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. כמו כן נהוג להצמיד לכל טור את הסדרה $S_n = a_1 + \dots + a_n$ שנקראת סדרת הסכומים החלקיים. התכנסות

טור נקבעת עפ"י ההגדרה באמצעות סדרת הסכומים החלקיים. (1) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

ואומרים שהטור מתכנס. (2) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ואומרים שהטור אמיתי מתבדר (או

"מתפוצץ באינסוף"). (3) אם לסדרה S_n אין גבול אזי גם לטור אין ואומרים שהוא מתנדנד (אוסצילנטי).

משפט (טמ2): האיבר הכללי בטור מתכנס שואף לאפס. כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. יתרה מזו, אם

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס. משפט זה אולי טריוויאלי אך שימושי ביותר!

קריטריון קושי להתכנסות טור (טמ3): הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\nu \in \mathbb{N}$ כך

שלכל $m > n > \nu$ מתקיים $|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$ כאשר את m אפשר לרשום גם כ $m = n + p$.

משפט (טמ4): אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ אזי גם אם נוריד מספר סופי של איברים, הטור יתכנס. כמו כן מתקיים

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$ הסדרה R_p נקראת **סדרת השאריות** ומתקיים $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = R_p = S - \sum_{n=1}^p a_n$.

משפט (טמ5): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ טורם מתכנסים, אזי כל צירוף ליניארי שלהם, גם הוא

מתכנס וקיים $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lambda A + \mu B$.

הגדרה (טמ6): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נאמר ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט (טמ7): אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אזי הוא מתכנס.

מבחני התכנסות בהחלט – מבחני התכנסות לטורים אי-שליליים:

הערה: בכל המשפטים לעיל נדון אנו נטפל רק בטורים אי-שליליים, כלומר, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אזי

$$\forall n \in \mathbb{N}. a_n \geq 0.$$

משפט ההשוואה הראשון (טמ8): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים. אזי אם $a_n \leq b_n$ $\exists v \in \mathbb{N}. \forall n > v$.

מתקיים: (1) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. (2) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

משפט ההשוואה השני (טמ9): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים כך ש $a_n, b_n > 0$. אזי אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לשני

הטורים אותו הטיב. כלומר: (1) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. (2) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אזי גם

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתבדר.}$$

משפט ההשוואה השלישי (טמ10): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים כך ש $a_n, b_n > 0$. נניח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

אזי: (1) אם $0 < L < +\infty$ אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. (2) אם $0 < L \leq +\infty$ אזי אם

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר. (3) אם $0 < L < +\infty$ אזי לשני הטורים אותו טיב.

קריטריון השורש של קושי (טמ11): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. אזי אם קיים $0 < q < 1$ כך ש

$$\exists v \in \mathbb{N}. \forall n > v. \sqrt[n]{a_n} \leq q$$

הטור מתבדר (אמיתי).

קריטריון השורש עם גבול עליון (טמ11): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אזי קיים הגבול העליון $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. כעת:

(1) אם $L < 1$ אזי הטור מתכנס. (2) אם $L > 1$ אזי הטור מתבדר. (3) אם $L = 1$ אזי לא ניתן לדעת.

קריטריון השורש עם גבול רגיל (טמ11): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נניח שקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. אזי: (1) אם $L < 1$

אזי הטור מתכנס. (2) אם $L > 1$ אזי הטור מתבדר. (3) אם $L = 1$ אזי לא ניתן לדעת.

מבחן היחס של דלאמבר (טמ12): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש. (1) אם קיים $0 < q < 1$ כך שכמעט כל

האיברים (פרט אולי למספר סופי) מקיימים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ אזי הטור מתכנס. (2) אחרת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ הוא מתבדר.

מבחן היחס עם גבולות (טמ12): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$ אזי: (1) אם $L < 1$ אזי

הטור מתכנס. (2) אם $L > 1$ אזי הטור מתבדר. (3) אם $L = 1$ אזי לא ניתן לדעת.

מבחן קומר (טמ13): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש. יהי $L > 0$ ותהי $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^+$ סדרת מספרים חיוביים

ממש. (1) אם החל מ n מסוים מתקיים $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq L$ אזי הטור מתכנס. (2) אם

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0 \quad \forall n \quad \text{מתבדר אזי גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ מתבדר.}$$

משפט Raabe Dahmel רבה (טמ14): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש. (1) אם קיים $L > 1$ כך ש

$$\exists v \in \mathbb{N}. \forall n > v. \left(n \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) \geq L > 1 \quad \text{אם } \exists v \in \mathbb{N}. \forall n > v. \left(n \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) \leq 1 \text{ מתכנס. (2)}$$

אזי הטור מתבדר.

גרסת הגבולות למשפט רבה (טמ14): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש ונניח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) = L$. (1) אם

$L > 1$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. (2) אם $L < 1$ אזי הטור מתבדר. (3) אם $L = 1$ אזי לא ניתן לדעת.

מסקנה – טור עוגן לבדיקות התכנסות (טמ15): לכל $\alpha > 2$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס כי $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^\alpha}$. לפי

משפט רבה זה נכון גם עבור $\alpha > 1$. עבור $\alpha \leq 1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתבדר, ובפרט הטור ההרמוני מתבדר.

קריטריונים להתכנסות טורים כלשהם:

קריטריון דיריכלה (טמ16): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ טור אינסופי כך ש: (1) הסדרה a_n מונוטונית

ושואפת לאפס $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (2) סדרת הסכומים החלקיים (ס"ח) B_n של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסומה, כלומר

$$\exists M > 0. \forall n. |B_n| \leq M \quad \text{מתכנס. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ בתנאים אלה מתקיים:}$$

קריטריון אבל (טמ17): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ טור אינסופי כך ש: (1) הסדרה a_n מונוטונית וחסומה. (2) הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ מתכנס. בתנאים אלה מתקיים: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ מתכנס.}$$

קריטריון לייבניץ (טמ18): בהינתן ש a_n מונוטונית ושואפת לאפס $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אזי הטור האלטרנטי

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ מתכנס.}$$

הגדרה (טמ19): טור יקרא מתכנס קומוטיביבית או מתכנס ללא תנאי אם תחת כל תמורה של איברי הטור,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \forall \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S \quad \text{כלומר:}$$

משפט (20): אם טור אי-שלילי מתכנס אזי הוא גם מתכנס קומוטטיבית.

הגדרה (21): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נגדיר: $a_n^- = \begin{cases} -a_n & a_n \leq 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$ ו $a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$.

משפט (22): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

משפט (23): כל טור שמתכנס בהחלט מתכנס קומוטטיבית.

משפט רימן (חומר העשרה): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור שמתכנס, אך לא בהחלט (נאמר שהוא **מתכנס על תנאי**). אזי

לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ קיימת תמורה σ כך שטור התמורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ מקיים את התכונה הבאה – אם נסמן ב

$$S_{\sigma(n)} \text{ את סדרת הסכומים החלקיים, מתקיים } \lim_{\sigma(n) \rightarrow \infty} S_{\sigma(n)} = \beta \leq \lim_{\sigma(n) \rightarrow \infty} S_{\sigma(n)} = \alpha.$$

משפט – מסקנת רימן (24): טור מתכנס קומוטטיבית אם ורק אם הוא מתכנס בהחלט.

טורי מכפלה:

הגדרה (25): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים. אזי ניבנה את המטריצה (האינסופית) הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & \dots & a_n b_1 & \dots \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \dots & a_n b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & \dots & a_n b_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

יקרא **טור מכפלה** כל טור שהוא סכום איברי כל המטריצה (ללא חשיבות לסדר).

סימונים: את טור המכפלה של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{(a,b)}$ או $\sum_{n=1}^{\infty} M_{n \times n}^{a,b}$ או בקיצור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{a,b}$.

משפט קושי (26): אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} M_{n \times n}^{a,b} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = A \cdot B$.

הגדרה (27): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים. תיקרא **מכפלת קושי** טור בו האיברים מסוכמים לפי

$$S_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1).$$

האלכסונים במטריצה (25). כלומר: $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

משפט מרטנס (28): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ טורים מתכנסים. אם אחד מהם מתכנס בהחלט, אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + \dots + a_n b_1) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = A \cdot B$$

מכפלת קושי שלהם מתכנסת ומתקיים:

משפט האבל (29): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים ותהי $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + \dots + a_n b_1)$ מכפלת קושי שלהם. אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + \dots + a_n b_1) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

שלושת הטורים מתכנסים אזי

תורת הטורים המספריים – טענות שימושיות מהתרגול

טענות בסיסיות בקשר להתכנסות טורים ומספר טורים מתכנסים חשובים:

משפט (טמ30): התכנסות של טור תלויה רק בזנב שלו.

טענה (טמ31): כל סידרה היא טור. את הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ יוצר הטור $\sum_{n=2}^{\infty} b_n - b_{n-1}$.

משפט (טמ32): אם $a_n \rightarrow 0$ (כלומר: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$) אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס.

טורי טיילור (טמ33): יהי $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$ טור טיילור של פונקציית הגזירה

אינסוף פעמים (כולל התאפסות אחרי שלב מסוים), אזי הוא מתכנס ל $f(x)$.

הטור הגיאומטרי (טמ34): יהיה $-1 < q < 1$ (שונה מאפס), אזי **הטור הגיאומטרי** שמנתן q מתכנס ומקיים

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ כמו כן, מתקיים: } S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ (ביטוי מפורש עבור סדרת הסכומים החלקיים).}$$

טורים טלסקופיים (טמ35): יקרא **טור טלסקופי** טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$. בטור כזה, האיבר הכללי

בסדרת הסכומים החלקיים נתון ע"י $S_n = a_{n+1} - a_1$. מכאן ברור שהטור מתכנס אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

טור העוגן ההרמוני (טמ36): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ אם $p \leq 1$ אזי הטור מתבדר (אמיתי), אם $p > 1$ אזי הטור

מתכנס (מאחר שהטור אי-שלילי אפשר לומר שהוא גם מתכנס בהחלט).

הגדרה (טמ37): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים. נאמר שלשניהם **אותו טיב** אם הם מתכנסים או מתבדרים

ביחד. כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

מסקנות ממבחני השוואה (טמ38): לטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+b \cdot n)^p}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^p(x/n)$ אותו טיב.

מבחן השורש של קושי ומבחן היחס של דלאמבר:

מבחן השורש של קושי (טמ39): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נסמן $K_n = \sqrt[n]{|a_n|}$. אזי:

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $K_n \leq q < 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט

(כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס). אם $1 \leq K_n$ אזי הטור מתבדר.

2. יהי $k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n$ הגבול העליון. אם $k < 1$ אזי הטור מתכנס. אם $k > 1$ הטור מתבדר. אם $k = 1$ המבחן

נכשל ואי אפשר לדעת.

3. אם קיים $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ אזי אם $K < 1$ אזי הטור מתכנס. אם $K > 1$ הטור מתבדר. אם $K = 1$ המבחן נכשל ואי אפשר לדעת.

מבחן היחס של דלאמבר (טמ40): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כך ש $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \neq 0$. נסמן $D_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממוקום מסוים $D_n \leq q < 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט

(כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס). אם $1 \leq D_n$ אזי הטור מתבדר.

2. אם קיים $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ אזי אם $D < 1$ אזי הטור מתכנס. אם $D > 1$ הטור מתבדר. אם $D = 1$ המבחן נכשל ואי אפשר לדעת.

הערה (טמ41): אם משפט דלאמבר עובד אזי גם מבחן השורש של קושי עובד.

מסקנות – מספר טורים שמתכנסים בהחלט (טמ42): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$.

מבחן העיבוי (טמ43): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כך ש $0 \leq a_n \searrow$ אי-שלילית מונוטונית יורדת. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד, כלומר, בעלי אותו טיב.

נוהל חקירת התכנסות של טורים כלליים:

אלגוריתם (טמ44): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נחקור את התכנסות הטור.

0. בדיקה האם האיבר הכללי שואף לאפס, כלומר האם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אחרת הטור לא מתכנס וסיימנו.

1. אם החל ממוקום מסוים כל איברי הטור אי-שליליים נשתמש בקריטריונים להתכנסות טורים אי-שליליים.

2. בדיקת התכנסות בהחלט: נבדוק התכנסות טור הערכים המוחלטים לפי הקריטריונים של התכנסות טורים אי-שליליים. אם הטור מתכנס בהחלט אז הוא גם מתכנס רגיל וסיימנו.

3. אם טור הערכים המוחלטים מתכנס נבדוק "התכנסות על תנאי" באמצעות הקריטריונים של קושי, דיריכלה, האבל, לייבניץ וכן טריקים שונים כאשר נמצא לנכון.

מבחני התכנסות לטורים כלשהם:

משפט קושי (טמ45): הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > k > n_0$

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \right| = |a_k + a_{k+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

מתקיים

מבחן לייבניץ (טמ46): אם $0 < a_n \downarrow 0$ מונוטונית יורדת לאפס אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

דוגמה (טמ47): יהי הטור הבא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. (1) אם $p \leq 0$ אזי הוא מתבדר. (2) אם $0 < p \leq 1$ אזי הטור

מתכנס על תנאי (לפי לייבניץ) אך אינו מתכנס בהחלט. (3) אם $p > 1$ אזי הטור מתכנס בהחלט.

למה (טמ48): אם $a_n \rightarrow L$ ו $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ אזי גם $b_n \rightarrow L$.

טרנספורם אבל (טמ49): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ וכן $B_n = \sum_{i=1}^n b_i$. אזי מתקיים:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) b_i.$$

למה (טמ50): אם a_i מונוטונית ו $|B_i| < L$ אזי $\exists L > 0$ $|S_n| \leq L(|a_1| + 2|a_n|)$.

מבחן אבל (טמ51): אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ו a_n מונוטונית חסומה אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

מבחן דיריכלה (טמ52): אם $\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| < M$ ו $\exists M > 0, \forall n, a_n \downarrow 0$ (מונוטונית לאפס) אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

קצת על טורי פורייה וההתכנסות שלהם:

$$\sum_{n=1}^N \sin(\theta n) = \frac{\cos(\theta/2) - \cos(\theta[N+1/2])}{2 \sin(\theta/2)} \quad \text{למה – זהות טריגונומטריות (טמ53):}$$

$$\sum_{n=1}^N \cos(\theta n) = \frac{\sin(\theta[N+1/2]) - \sin(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} \quad \text{למה – זהות טריגונומטריות (טמ53):}$$

משפט (טמ54): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sin(n\theta)$ כאשר $\theta \neq 2\pi k$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ מתבדר אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sin(n\theta)$

לא מתכנס בהחלט. **הוכחה:** $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n) \sin(n\theta)| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \sin^2(n\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \left(\frac{1 - \cos(2n\theta)}{2} \right)$

דוגמה (טמ55): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^p}$. (1) אם $p \leq 0$ אזי הוא מתבדר (כי $a_n \not\rightarrow 0$). (2) אם $0 < p \leq 1$ אזי

הטור מתכנס על תנאי (לפי דיריכלה) אך אינו מתכנס בהחלט. (3) אם $p > 1$ אזי הטור מתכנס בהחלט.

קומוטטיביות ואסוציאטיביות:

משפט (טמ56): טור מתכנס קומוטטיבית אם ורק אם הוא מתכנס בהחלט.

משפט האסוציאטיביות (טמ57): אם טור עם סוגריים באיבר הכללי $(a_n + b_n + \dots + z_n)$ מתכנס ובכל

אחד מהסוגריים האיברים בעלי אותו סימן אזי מותר להוריד סוגריים, כלומר, הטור ללא סוגריים גם מתכנס ולאותו גבול.