

משוואות דיפרנציאליות רגילות

מסמך זה הורד מהאתר <http://underwar.livedns.co.il>.
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע
המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר
עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

כל הזכויות שמורות ליוני יוסף - ©2002.

משוואות דיפרנציאליות רגילות

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \text{צורה כללית:}$$

משפט הקיום והיחידות:

על מנת לקבל פתרון אנו זקוקים לתנאי התחלה $y(x_0) = y_0$, נכנה פתרון זה $y_p(x)$. לפי המשפט, אם $p(x)$ ו- $q(x)$ מוגדרות בנקודה x_0 אז $y_p(x)$ מוגדר בכל תחום הרציפות של $p(x)$ ושל $q(x)$ וכן הוא הפתרון היחיד המקיים תנאי התחלה אלו, כלומר שלא יתכן פתרון נוסף למשוואה העובר באותה הנקודה. מכאן שאם נשרטט את הגרפים של הפתרונות השונים של המשוואה, לא יתכן שהם יחתכו האחד את השני בתחום המדובר.

א. כפל בגורם אינטגרציה

כופלים את המשוואה בגורם האינטגרציה $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ ומבצעים אינטגרל על שני האגפים (עם קבוע).

ב. ווריאצית המקדמים

מציעים פתרון מן הצורה $y = u(x)e^{\int p(x)dx}$, גוזרים למציאת y' ומציבים במשוואה על מנת למצוא את $u(x)$.

משוואות שאינן ליניאריות מסדר ראשון

$$y' = f(x, y) \quad \text{צורה כללית:}$$

משפט הקיום והיחידות

לפי תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ נקבל פתרון פרטי של המשוואה ונסמנו $y_p(x)$. אם הנקודה (x_0, y_0) נמצאת בתחום הרציפות של $f(x, y)$ ושל $\frac{\partial f}{\partial y}$, אזי פתרון זה מוגדר בסביבה מסוימת של x_0 והינו הפתרון היחיד בתחום זה. השוני ממשפט הקו"י למשוואות ליניאריות:

- כאן תחום הרציפות הוא מלבן ואינו תלוי רק ב- x_0 ;
- יש לבדוק גם את רציפות f'_y ;
- $y_p(x)$ אינו מוגדר בהכרח בכל תחום הרציפות.

משוואת ברנוליצורה כללית: $y' + p(x)y = q(x)y^n$

מחלקים את המשוואה ב- y^n ומציבים $z = y^{1-n}$, מכאן $z' = (1-n)y^{-n}y'$ ובהצבה מקבלים משוואה ליניארית מן הצורה $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$.

משוואת ריקטיצורה כללית: $y' = p(x) + g(x)y + h(x)y^2$

לצורך מציאת הפתרון הכללי נזדקק לפתרון פרטי. ע"י ההצבה $y = y_p + \frac{1}{v(x)}$ (שנגזרתה $y' = y'_p - \frac{v'}{v^2}$) נקבל משוואה ליניארית מן הצורה $v' + [g(x) + 2h(x)y_p] \cdot v = -h(x)$.

משוואה פרידהצורה כללית: $f(y)y' = g(x) \Leftrightarrow f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$

משתמשים בסימונים של לייבניץ ו"כופלים" ב- dx , נקבל $f(y)dy = g(x)dx$ ומכאן נותר לבצע אינטגרל על שני האגפים: $\int f(y)dy = \int g(x)dx$

משוואה מדויקת

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \Leftrightarrow M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{צורה כללית:}$$

תנאי הכרחי ומספיק להיות המשוואה מדויקת הוא $M'_y = N'_x$, כאשר במידה ואין התנאי מתקיים ישנה אפשרות "לתקן" את המשוואה ע"י כפל בגורם אינטגרציה. במידה והתנאי מתקיים, נשים לב כי צורת המשוואה היא הנגזרת לפי כלל השרשרת של הפונקציה הסתומה $f(x, y) = c$: $\frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0$, כאשר $f'_y = N(x, y)$; $f'_x = M(x, y)$. נבצע אינטגרל על $M(x, y)$ לפי x ונקבל: $f(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y)$. נגזור את הביטוי לפי y ונשווה ל- $N(x, y)$, כך נמצא את $h(y)$ וכאמור, הפתרון הוא מן הצורה $f(x, y) = c$.

"תיקון" ע"י כפל בגורם אינטגרציה: יש להפריד בין המקרים בהם גורם האינטגרציה תלוי רק ב- x , רק ב- y או בשניהם, ומציאת הגורם הנכון מתבצעת בדרך הניסוי והטעיה. לדוגמא, במידה ומחפשים גורם התלוי ב- x בלבד $\mu(x)$, הדרישה תהיה: $\frac{d}{dy}[\mu(x)M(x, y)] = \frac{d}{dx}[\mu(x)N(x, y)]$. נקבל משוואה פרידה ממנה נמצא את $\mu(x)$, ובו נכפול את המשוואה על מנת להפכה למדויקת. בדומה נמצא גורם התלוי ב- y בלבד. בנוגע לג"א התלוי בשני המשתנים, נזדקק לסיוע בסגנון "ידוע שניתן להפוך את המשוואה למדויקת ע"י כפל בג"א התלוי ב- $x^2 + y^2$ " (דוגמא לביטוי של x ו- y). במקרה זה נציב $z = x^2 + y^2$ ואז הדרישה תהיה דומה כאשר הפעם הגזירה של גורם האינטגרציה $\mu(z)$ תתבצע לפי כלל השרשרת:

$$\left(\text{לפי הדוגמא}\right) \quad \frac{d}{dx}\mu(z) = \frac{d\mu}{dz}2x \quad ; \quad \frac{d}{dy}\mu(z) = \frac{d\mu}{dz}2y$$

הערה: בחיפוש אחר ג"א כדאי לגזור עבור $\mu(x, y)$ כללי ואז קל להבחין בג"א הנכון.

משוואה הומוגנית

$$\text{צורה כללית: } y' = f(x, y) \quad \text{כאשר ניתן לכתוב את } f(x, y) \text{ כפונקציה של } \frac{y}{x}.$$

נשתמש בהצבה $v(x) = \frac{y}{x}$, מכאן $y' = v + xv' \rightarrow y = vx$. לכשנציב במשוואה נקבל משוואה פרידה.

משוואה שהיא מנת ישרים

$$צורה כללית: y' = F\left(\frac{ax+by+m}{cx+dy+n}\right)$$

המקרים השונים הם מנת ישרים שנחתכים בראשית (ואז המשוואה היא הומוגנית), מנת ישרים שאינם נחתכים בראשית ומנת ישרים מקבילים:

מנת ישרים שאינם נחתכים בראשית ($m \neq 0$ או $n \neq 0$)

במקרה זה נבצע הזזה של הישרים לראשית: $\tilde{x} = x + \alpha$, $\tilde{y} = y + \beta$, נציב במשוואה ונפתור כמשוואה הומוגנית.

מנת ישרים מקבילים ($b = d$, $a = c$)

נציב $z = ax + by + m$ ונבטא את המכנה באמצעות z . נגזור על מנת לקבל את y' , נציב ונקבל משוואה פרידה של y ו- z .

מציאת משפחה אורתוגונלית

כאן תהא נתונה משפחת עקומות ע"י $F(x, y, c) = 0$ כאשר c הינו הפרמטר, מציאת משפחת העקומות הניצבות תעשה לפי השלבים הבאים:

- א. חילוץ הפרמטר.
- ב. גזירה למציאת y' .
- ג. הצבת הפרמטר.
- ד. מציאת y'_{ort} לפי $y'_{ort} = -1/y'$.
- ה. פתרון המד"ר לקבלת המשפחה המבוקשת.

- במידה ונתונה נקודה (x_0, y_0) ויש למצוא את $y'_{ort}(x_0)$, ניתן להציב מיד את הנקודה על-מנת למצוא את ערך הפרמטר c , כלומר את העקום המסוים. גזרים ומבודדים את y' (שיפוע העקום), מוצאים את y'_{ort} (שיפוע העקום הניצב) לפי הקשר בסעיף ד' ומציבים את הנקודה.
- כאשר יש למצוא משפחת עקומות שאינן נחתכות בזווית ישרה למשפחה הנתונה אלא בזווית α , נחליף את הקשר בסעיף ד' בנוסחא: $tg\alpha = \pm \frac{y'_1 - y'_2}{1 + y'_1 \cdot y'_2}$

משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר n

צורה כללית: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0$

משפט הקיום והיחידות

נקבל פתרון פרטי ע"י תנאי התחלה

$$\begin{cases} y(x_0) = k_0 \\ y'(x_0) = k_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1} \end{cases}$$

ונסמנו $y_p(x)$ אם x_0 נמצאת בתחום

הרציפות של המשוואה (של כל הפונקציות $p_i(x)$) אזי הפתרון $y_p(x)$ מוגדר בכל תחום הרציפות של המשוואה וכן הוא היחיד העונה על תנאי התחלה זה.

הוורונסקיאן

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תכונת הוורונסקיאן היא שבמידה והפתרונות הינם בת"ל, הוא אינו מתאפס באף נקודה בתחום ההגדרה של המשוואה ההומוגנית. לעומת זאת, כאשר הפתרונות תלויים ליניארית הוא מתאפס בכל נקודה בתחום. מכאן שאם נמצא ביטוי לוורונסקיאן המתאפס בהצבת נקודות מסוימות בלבד, משמע הפתרונות בת"ל אך נקודות אלו אינן שייכות לתחום ההגדרה של המשוואה.

שיטת הורדת הסדר של דלאמבר

במידה ונתון פתרון אחד $y_1(x)$ ניתן באמצעותו להוריד את סדר המשוואה ע"י ההצבה $y = v(x)y_1(x)$, גוזרים כנדרש ומציבים במשוואה. למרבה התענוג כל הגורמים המכילים את $v(x)$ מצטמצמים, מציבים $w = v'$ ומקבלים משוואה מסדר אחד נמוך יותר.

נוסחת אבל עבור הוורונסקיאן

כאשר בהינתן פתרון הומוגני אחד $y_1(x)$ נמצא פתרון נוסף ע"י הנוסחה

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

צורה כללית: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$

נרשום את הפולינום האופייני לפי $ay^{(k)} \Rightarrow ar^k$ ונמצא את שורשיו. המקרים השונים הם:

א. שורשים ממשיים ושונים $r_1 \neq r_2$

הפתרון הכללי של המשוואה יהיה $y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

ב. שורשים קומפלקסים $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

הפתרון הכללי של המשוואה יהיה $y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ מתבסס על הזהות

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$$

ג. שורשים עם ריבוי $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_m$ (ריבוי m , נכנה את כל השורשים בשם r)

הפתרון הכללי של המשוואה יהיה מן הצורה:

$$y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + c_3 x^2 e^{rx} + \dots + c_m x^{m-1} e^{rx}$$

משוואת אוילר

צורה כללית: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$

ע"י ההצבה $t = \ln(x)$ נקבל משוואה שמקדמיה קבועים במשתנים y ו- t . הנגזרות $\frac{d^n}{dx^n} y$

$$\text{יוחלפו לפי כלל השרשרת} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

דרך קיצור: ניתן למצוא את הפולינום האופייני מן המשוואה המקורית לפי

$ax^k y^{(k)} \Rightarrow ar(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)$, למצוא את הפתרונות לפי t ולחזור ל- x לפי ההצבה.

הערות

- נוסחת אבל והורדת הסדר של דלאמבר תקפות לכל משוואה ליניארית, לאו דווקא בעלת מקדמים קבועים או אוילר.
- כדאי לבדוק אם ישנם פתרונות גלויים לעין – בד"כ פונקציות קבועות המאפסות את המשוואה.
- יש לזכור לבדוק פתרונות סינגולרים שאבדו בדרך.

דרכים למציאת פתרון פרטי למשוואה אי-הומוגנית

צורה כללית של משוואה אי-הומוגנית: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = g(x)$

יש לפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה טרם מציאת פתרון פרטי לאי-הומוגנית. הפתרון הכללי של המשוואה האי-הומוגנית יורכב מסכום הפתרון הכללי של ההומוגנית והפתרון הפרטי שנמצא: $y_c = y_h + y_p$

שיטת השוואת המקדמים – שיטת הניחוש

$e^{\alpha x}$ (פולינום ממעלה k) כאשר $g(x) = (k)$ כאשר a ממשי וריבוי בפ"א הוא m : הפתרון שנציע יהיה מן הצורה $y_p = x^m p(x)e^{\alpha x}$ כאשר $p(x)$ הינו פולינום ממעלה k כלשהו. נציב במשוואה ונשווה מקדמים על מנת למצוא את $p(x)$.

במקרה של $a = \alpha \pm i\beta$ קומפלקסי הפתרון שנציע יהיה מן הצורה $y_p = x^m e^{\alpha x} [p_1(x) \cos \beta x + p_2(x) \sin \beta x]$ כאשר $p_1(x), p_2(x)$ הינם פולינומים ממעלה k כלשהם.

שיטת ווריאצית הפרמטר

נשתמש בפתרונות המשוואה ההומוגנית שמצאנו $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ונציע פתרון מן הצורה $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \dots + u_n(x)y_n$.

נבנה את מטריצת הפתרונות (וורונסקי) $W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$, כעת נוכל למצוא

את הפתרונות לפי הדרישה $W \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$. זוהי מערכת משוואות אותה ניתן לפתור

בשיטת האלימינציה, ע"י כפל משמאל בהפכית W^{-1} או לפי כלל קרמר: $u_i'(x) = \frac{|W_i|}{|W|}$. אין צורך בהוספת קבועים באינטגרלים על $u_1'(x), u_2'(x), \dots, u_n'(x)$ כיוון שזהו פתרון פרטי.

מערכות משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

צורה כללית: $\overline{X}' = A\overline{X} + B(t)$ כאשר A מטריצת המקדמים ו- B מטריצת האיברים החופשיים.

משפט הקיום והיחידות למערכת ליניארית

$$\begin{cases} x_1(t_0) = k_0 \\ x_2(t_0) = k_1 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = k_n \end{cases} \quad \text{מערכת ליניארית צורתה } x'_i = \sum_j a_{i,j} x_j + g_i(t) \text{ , כאשר תנאי ההתחלה הוא}$$

אם הנקודה t_0 נמצאת בתחום הרציפות של $g_i(t)$, כאשר $i=1 \dots n$, אזי הפתרון מוגדר בכל התחום.

וורונסקיאן הפתרונות

טרמיננט המטריצה שעמודותיה הן הבסיס למרחב הפתרונות ההומוגני הוא הוורונסקיאן של המערכת, כלומר אם הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא ווקטור מן הצורה $\overline{X}_c = c_1 \overline{X}^1(t) + c_2 \overline{X}^2(t) + \dots + c_n \overline{X}^n(t)$, וורונסקיאן הפתרונות יהיה $W = \det \left[\overline{X}^1(t) \mid \overline{X}^2(t) \mid \dots \mid \overline{X}^n(t) \right]$

וורונסקיאן הפתרונות הוא או שמתאפס בכל נקודה בתחום הרציפות – ואז הפתרונות הינם תלויים ליניארית - או שאינו מתאפס באף נקודה בתחום, ואז הם בת"ל.

נוסחת אבל למערכות ליניאריות היא:

$$W(t) = ce^{\int tr(A) dt} \text{ , כאשר } tr(A) \text{ היא עקבת מטריצת המקדמים.}$$

שיטת האלימינציה

שיטה זו מתבססת על העובדה שניתן להמיר כל מערכת בת n משוואות מסדר ראשון למשוואה אחת מסדר n (ולהפך). מבודדים את אחד המשתנים, גוזרים לפי הצורך ומציבים. בדרך זו ניתן להמיר מערכת משוואות הומוגנית או אי-הומוגנית למשוואה אחת מסדר n אותה פותרים באחת הדרכים המתוארות לעיל.

פתרון המערכת ההומוגנית $\bar{X}'(t) = A\bar{X}(t)$

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה A לפי $|A - \lambda I| = 0$ ונתאים לכל λ_i וקטור עצמי $\bar{V}_i$, הפתרון הכללי יהיה מן הצורה $\bar{X} = c_1 e^{\lambda_1 t} \bar{V}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \bar{V}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \bar{V}_n$. המקרים השונים יהיו ע"ע ממשיים, ע"ע קומפלקסים וע"ע מרובים. במקרה של ע"ע ממשיים ושונים, הפתרון מתואר לעיל.

א. ע"ע קומפלקסים

עבור זוג ע"ע $\alpha \pm i\beta$ נבחר את אחד מהם אקראית ונמצא לו ו"ע קומפלקסי $\bar{V}$. נקח למשל את $\alpha + i\beta$, ואז הפתרונות שנקבל עבור זוג זה של ע"ע יהיו $\bar{X}_1 = \text{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t} \bar{V})$, $\bar{X}_2 = \text{Im}(e^{(\alpha+i\beta)t} \bar{V})$.

ב. ע"ע מרובים – ישנם יותר ע"ע מאשר ו"ע.

במידה וחסר ו"ע אחד עבור ע"ע λ , נציע פתרון מן הצורה $\bar{X}_{1,2} = e^{\lambda t} (\bar{V}_1 + \bar{V}_2 t)$, נציב ונפתור לפי השוואת מקדמים. במידה וחסרים k וקטורים עצמיים, הפתרון המוצע יכול פולינום ממעלה k : $\bar{X}_{1,2,\dots,k} = e^{\lambda t} (\bar{V}_1 + \bar{V}_2 t + \dots + \bar{V}_{k+1} t^k)$.

מציאת פתרון פרטי של מערכת אי-הומוגנית בשיטת ווריאצית הפרמטר

צורה כללית: $\bar{X}' = A\bar{X} + \bar{G}(t)$, כאשר $\bar{G}$ הינו ווקטור האיברים החפשיים (הגורם האי-הומוגני).

בהקבלה לפתרון משוואה מסדר n , נציע פתרון המתבסס על פתרון המערכת ההומוגנית שצורתו $\bar{X} = u_1(t) e^{\lambda_1 t} \bar{V}_1 + u_2(t) e^{\lambda_2 t} \bar{V}_2 + \dots + u_n(t) e^{\lambda_n t} \bar{V}_n$.

נסמן את מטריצת הפתרונות $\bar{X}(t) = [\bar{X}^1(t) | \bar{X}^2(t) | \dots | \bar{X}^n(t)]$, ואז את הפונקציות הנעלמות

$u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ נמצא לפי הדרישה $\bar{X}(t) \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \bar{G}(t)$. ניתן לפתור את המערכת

בשיטת האלימינציה, ע"י כפל בהפכית $\psi^{-1}(t)$ או בעזרת כלל קרמר: $u_i'(t) = \frac{|\psi_i(t)|}{|\psi(t)|}$.

תזכורות

- הפתרון הכללי הוא סכום של הפתרון ההומוגני ופתרון פרטי כלשהו: $y_c = y_h + y_p$
- הפתרון ההומוגני הוא הפרשם של שני פתרונות פרטיים בת"ל: $y_h = y_{p_1} - y_{p_2}$

כללים לחישוב דטרמיננט: (כל האמור לגבי שורות תקף גם לגבי עמודות)

- החלפה בין שתי שורות גוררת שינוי סימן הדט'.
- ניתן להוציא גורם משותף משורה אל מחוץ לדט'.
- ניתן להוסיף כפולה של שורה בסקלר לשורה אחרת.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים:

- הערכים העצמיים של המטריצה A הינם שורשי הפולינום האופייני שלה: $|A - \lambda I| = 0$.
- הוקטור העצמי המתאים לע"ע λ יתקבל ע"י המשוואה $(A - \lambda I) \cdot \bar{V} = 0$. לא יתכן שלע"ע לא יהיה לפחות ו"ע אחד שונה מאפס.
- ו"ע השייכים לע"ע שונים הינם בת"ל.
- מטריצה בעלת n ו"ע בת"ל הינה לכסינה.
- במידה וחסר ו"ע לע"ע מריבוי מסויים (הריבוי הגיאומטרי $>$ הריבוי האלגברי), נציע פתרון בצורת פולינום (נניח כי הר"א הוא 2 והר"ג הוא 1, כלומר חסר ו"ע אחד): $\bar{X}_p = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
- $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$ הוא ו"ע המתאים לע"ע λ , מכאן שהוא מקיים את $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$.
- $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור המקיים $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

נוסחת דה-מואבר:

שורשי המשוואה $r^n = Z$ הם $r_k = \sqrt[n]{Z} \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$, $k = 1..n$

פתרון משוואות באמצעות טורים**סביב נקודה רגולרית – נקודה השייכת לתחום הרציפות של המשוואה**

בשיטה זו אין הבדל בין פתרון משוואות ליניאריות ולא ליניאריות, הומוגניות ואי-הומוגניות, כלומר ניתן לפתור כל משוואה. ה"חסרון" הוא שפתרונות המשוואה גם הם ייוצגו באמצעות טורי-חזקות, כלומר לא תמיד נוכל לקרוא לפתרון בשם נוח לכתיבה כמו $\sin x, e^x, \ln x$ וכדומה.

- צורה כללית של טור חזקות (סביב הנקודה x_0): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.
- במידה ונרצה לתרגם פונקציה מוכרת לטור חזקות נשתמש במקדמי טיילור:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (\text{במרבית המקרים נפתח סביב הנקודה } x_0 = 0).$$
- בטור חזקות ישנה התכנסות במ"ש, לכן הנגזרת של הטור שווה לטור הנגזרות:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} \quad (\text{כנ"ל לגבי נגזרות גבוהות}).$$
- ניתן לבצע הזזה של אינדקס הטור כאשר הכלל הוא כדלקמן: אם מעלים את האינדקס ב- k , יש לפצות על כך בהורדת נקודת ההתחלה של הטור ב- k , לדוגמא:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2) (x-x_0)^n$$

פתרון לפי טורים מתבצע ע"י הצעת פתרון כללי מן הצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, גזירה לפי הצורך והצבה במשוואה. כאשר המשוואה מכילה פונקציות נוספות, נתרגם אותן לטורים לפי טיילור (מקלורן) ונציב. בד"כ נקבל טורים בעלי אינדקסים שונים ונקודות התחלה שונות, לכן על מנת לאחד את הטורים לטור חזקות אחד נבצע הזזות והתאמות של האינדקסים. לאחר האיחוד והשוואת המקדמים נקבל נוסחת נסיגה (נוסחא רקורסיבית) ממנה ניתן לחשב את איברי הטור ולעיתים אף למצוא איבר כללי המתאר פונקציה מוכרת.

במשוואה מסדר שני:

- פתרון כללי יתקבל כאשר נציב שני תנאי התחלה בת"ל, פעם $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ ופעם $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$.
- פתרון פרטי אף הוא יתקבל מנוסחת הנסיגה, ע"י הצבת תנאי ההתחלה $\begin{cases} a_0 = y(0) = k_1 \\ a_1 = y'(0) = k_2 \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות של טור נתון לפי הנוסחא $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, כאשר ישנו קשר ברור בין רדיוס

ההתכנסות של טור לבין תחום ההגדרה של הפונקציה אותה הוא מתאר – זהו למעשה המרחק (במישור הקומפלקסי) בין הנקודה סביבה פיתחנו את הטור לבין נקודת אי-הרציפות הקומפלקסית הקרובה של הפונקציה. הטור מתכנס (ואף בהחלט) עבור כל $|x-x_0| < R$.