גירסה 1.00 – 23.1.2003

אלגוריתמים בתורת הגרפים – חלק רביעי

מסמך זה הינו הרביעי בסדרת מסמכים אודות תורת הגרפים, והוא חופף בחלקו לקורס "אלגוריתמים בתורת הגרפים" בטכניון (שאינו מועבר יותר).

ברצוני להודות תודה מיוחדת **לפרופסור שמעון אבן ז"ל**, על העזרה העצומה שעזר לי בהבנת החומר ובשאלות רבות עליהן ענה לי כאשר למדתי את הנושא. שמעון אבן היה מרצה שהערכתי מאוד ותרומתו למסמך זה היתה משמעותית.

מקורות:

- המסמך מבוסס במידה רבה על הרצאותיו של פרופסור שמעון אבן משנת 2002 וכן על שאלות רבות עליהן שמעון אבן ענה לי.
- ספרו של שמעון אבן מ-1979, Graph Algorithms
- פרקים מספרו החדש של שמעון אבן, שפורסמו בשנת 2002
- חלקים מהרצאות וידאו של **פרופסור ראובן בר יהודה** בנושא אלגוריתמים בתורת הגרפים.

המסמכים כוללים נקודות רבות ממקורות אלו, ובנוסף תובנות רבות, דוגמאות ורעיונות שאספתי במהלך לימוד הקורס.

ניר אדר

זרימה ברשתות

סימון

עבור כל צומת $v \in V$: $\alpha(v)$ הינה קבוצת הקשתות הנכנסות אל v, ו- $\beta(v)$ הינה קבוצת הקשתות היוצאות מ-v.

הגדרה

רשת, המסומנת $N\left(G(V,E),s,t,c\right)$, כוללת את הרכיבים הבאים:

1. גרף $G(V,E)$ מכוון ללא חוגים עצמיים וללא קשתות מקבילות.
2. שני צמתים $s,t \in V$. s מכונה **מקור** ו-t מכונה **בור**.
   אין כל קשר בין צמתים אלו למקור ולבור כפי שהוגדרו עבור גרפים מכוונים.
3. $c: E \to R^{+}$ - **פונקצית קיבול**, המתאימה מספר לכל צומת.
4. **פונקצית זרימה** $f: E \to R^{\geq 0}$ המקיימת את התנאים הבאים:
   a. **תנאי הקשת:** עבור כל קשת $e \in E$, נדרוש כי $0 \leq f(e) \leq c(e)$.
   b. לכל צומת v שאיננו s או t, מתקיים כי $\sum_{e\in\beta(v)} f(e) = \sum_{e\in\alpha(v)} f(e)$.
   כלומר: הצומת אינו יכול לייצר זרימה ואינו יכול לספוג זרימה.
   לעומת זאת: מקור יכול לייצר זרימה באופן בלתי מוגבל, ובור יכול לספוג זרימה באופן בלתי מוגבל.
   ניתן לכתוב את נוסחה זו גם בצורה הבאה: $\sum_{e\in\beta(v)} f(e) - \sum_{e\in\alpha(v)} f(e) = 0$

הגדרה

נגדיר את **הזרימה הכללית** הנובעת מ-f בצורה הבאה: $\sum_{e\in\beta(t)} f(e) - \sum_{e\in\alpha(t)} f(e) = \text{F}$.
הזרימה הכללית הינה סכום הזרמים הנכנסים אל הבור.

הבעיה אותה אנו רוצים לפתור: בהינתן רשת, מצא f עבורו F מקסימום.

הגדרה

נגדיר את S להיות תת קבוצה של $V-\{t\}$. נגדיר את $\bar{S}$ להיות המשלים של S, כלומר, $\bar{S}=V-S$. נגדיר את $\left(S:\bar{S}\right)$ להיות קבוצת הקשתות שצומת ההתחלה שלהן היא ב- S וצומת הסיום שלהם ב- $\bar{S}$. $\left(\bar{S},S\right)$ תוגדר בצורה דומה.
קבוצת הקשתות המקשרות את S עם $\bar{S}$ (בשני הכיוונים) נקראת **החתך** המוגדר על ידי S.

למה 1

עבור כל S ועבור כל f מתקיים $F=\sum_{e\in(S:\bar S)} f(e)-\sum_{e\in(\bar S:S)} f(e)$.

הוכחה

ראינו כי עבור t: $F=\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)$.

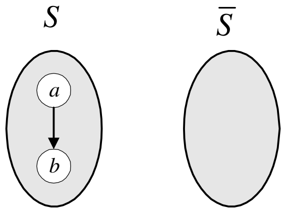
כמו כן, עבור כל צומת אחרת $\bar S\ni s\neq t$, מתקיים כי $0=\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)-\sum_{e\in\beta(v)} f(e)$.

אם נרשום את כל המשוואות הנ"ל עבור כל הצמתים ב- $\bar S$, נקבל $|\bar S|$ משוואות.

נחבר כעת את כל המשוואות. בצד השמאלי נקבל פשוט F, ובצט הימני נקבל סכומים שונים. נביט במקרים שונים לגבי הסכומים הנ"ל.

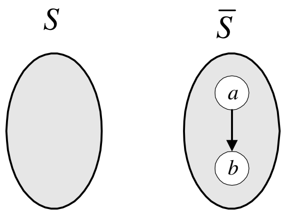
מקרה 1

עבור צומת $x\xrightarrow{e}y$, אם גם x וגם y נמצאים ב-S, $f(e)$ לא מופיעה כלל בצד הימני של המשוואה.



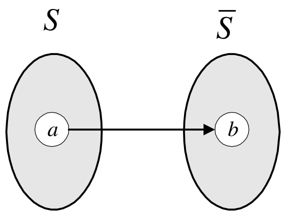
מקרה 2

עבור צומת $x\xrightarrow{e}y$, אם גם x וגם y נמצאים ב- $\bar S$ $f(e)$ מופיעה פעמיים בצד הימני של המשוואה, פעם עם סימן חיובי ופעם עם סימן שלילי, ו-f מצטמצמת.



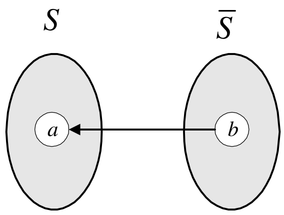
מקרה 3

עבור צומת $x\xrightarrow{e}y$, כך שx נמצאת ב- S ו-y נמצאת ב- $\bar S$, $f(e)$ מופיעה פעם אחת בצד הימני של המשוואה עם סימן חיובי. כמו כן, $e\in\left(S:\bar S\right)$.



מקרה 4

עבור צומת $x\xrightarrow{e}y$, כך שx נמצאת ב- $\bar S$ ו-y נמצאת ב- S, $f(e)$ מופיעה פעם אחת בצד הימני של המשוואה עם סימן שלילי. כמו כן, $e\in\left(\bar S:S\right)$.



לכן, אם נסכם את כל הצמתים, נקבל כי $F=\sum_{e\in(S:\bar S)} f(e)-\sum_{e\in(\bar S:S)} f(e)$ והלמה הוכחה.

<u>הגדרה</u>

בהינתן חתך $\left(S:\bar{S}\right)$ נגדיר את **ערך החתך** $C\left(S:\bar{S}\right)$ בצורה הבאה:

$$C\left(S:\bar{S}\right) \triangleq \sum_{e\in\left(S:\bar{S}\right)} c(e)$$

ערך החתך הוא סכום הקיבולים של קשתות החתך.

<u>למה 2</u>

עבור כל S ועבור כל f מתקיים $\mathrm{F} \le C\left(S:\bar{S}\right)$.

<u>מסקנות</u>

- החתך הוא חסם עליון על הזרימה הכללית.
- כל זרימה היא חסם תחתון לערך החתכים.

<u>משפט - max flow min cut theorem</u>

לכל רשת יש זרימת מקסימום ששווה לקיבול של החתך עבורו הקיבול מינימלי.

<u>חשיבות</u>

נניח שנגיע למצב בו יתקיים כי $\mathrm{F} = C\left(S:\bar{S}\right)$, אזי נוכל לומר כי הזרימה שבידינו היא מקסימום, והחתך הוא מינימום (מכיוון ששניהם חסמים אחד של השני).

<u>הוכחת הלמה</u>

ידוע לפי הלמה הראשונה כי $\mathrm{F} = \sum_{e\in\left(S:\bar{S}\right)} f(e) - \sum_{e\in\left(\bar{S}:S\right)} f(e)$.

תנאי הקשת אומר לנו כי $f(e) \ge 0$, מכאן גם $-f(e) \le 0$, ולכן:

$$\mathrm{F} = \sum_{e\in\left(S:\bar{S}\right)} f(e) - \sum_{e\in\left(\bar{S}:S\right)} f(e) \le \sum_{e\in\left(S:\bar{S}\right)} f(e) + 0 = C\left(S:\bar{S}\right)$$

<u>הגדרה</u>

קשת רוויה היא קשת עבורה מתקיים כי $f(e) = c(e)$.

FORD AND FULKERSON ALGORITHM (1956)

מטרת האלגוריתם: בהינתן רשת $N\left(G\left(V,E\right),s,t,c\right)$ ופונקצית זרימה f, הפונקציה משנה את f על מנת להגדיל את הזרימה הכללית.

הגדרה

מסלול שיפור הוא מסלול פשוט מ-s אל t (לא בהכרח מכוון), אבל שניתן להשתמש בו כדי לקדם זרימה מ-s אל t. במסלול זה, אם e היא קשת המכוונת בכיוון מ-s אל t, אזי כדי ש-e תוכל לדחוף זרימה, צריך להתקיים כי $f(e)<c(e)$. אם e מכוונת בכיוון ההפוך, אז כדי לדחוף זרימה דרך הצומת, אנו צריכים להיות מסוגלים לבטל חלק מהזרימה, כלומר נדרוש כי $f(e)>0$.
באלגוריתם זה, כמו באלגורתמים אחרים שהצגנו במסמכים קודמים, ישנו תהליך סימון. בתחילת האלגוריתם כל הצמתים אינם מסומנים.
בתהליך הסימון - אם אנו מסמנים את צומת t, הרי שקיים מסלול שיפור. אנו נשתמש במסלול זה כדי לשפר את הזרימה, ולאחר מכן נחזור על התהליך, עד שלא יימצא יותר תהליך שיפור.

הגדרה

קשת מועילה תוגדר בצורה הבאה:

קשת קדימה $u\xrightarrow{e}v$ תיקרא מועילה אם:
1. u מסומן ו-v איננו מסומן.
2. $f(e)<c(e)$

קשת אחורה $u\xleftarrow{e}v$ תיקרא מועילה אם:
1. u מסומן ו-v איננו מסומן.
2. $f(e)>0$

במקרה של קשת קדימה, נסמן את v בסימון e^+, ונגדיר את **הקיבול השיורי** להיות $\Delta e=c(e)-f(e)$.
במקרה של קשת אחורה, נסמן את v בסימון e^-, ונגדיר את **הקיבול השיורי** להיות $\Delta e=f(e)$.

הקיבול השיורי אומר לנו כמה זרם נוסף ניתן להזרים דרך הצומת.

האלגוריתם

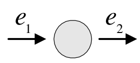
(1) Assign some legal initial flow *f* to the edges; an assignment f(e) = 0 to every edge *e* will do.
(2) Mark *s* "labeled" and all other vertices “unlabeled”.
(3) While there is vertex *v* which can be labeled by either a forward or backward labeling and also t is not labeled:
(4) Label v with the proper sign - either e^+ or e^-
(5) If *t* isn't labeled, halt; the present flow is maximum.
(6) Starting from *t* and by the use of the labels, backtrack the path through which the labeling reached *t* from *s*. Let this path be $s = v_0 \overset{e_1}{-} v_1 \overset{e_2}{-} v_2 \overset{e_3}{-} \cdots - v_{l-1} \overset{e_l}{-} v_l = t$.
(The directions of the edges are not shown, since each may be in either direction) . Let $\Delta = \mathrm{Min}_{1 \le i \le l} \Delta(e_i)$. If e_i is forward, i.e. $v_{i-1} \xrightarrow{e_i} v_i$, then $f(e_i) \leftarrow f(e_i) + \Delta$. If e_i is backward, i.e. $v_{i-1} \xleftarrow{e_i} v_i$, then $f(e_i) \leftarrow f(e_i) - \Delta$.
(7) Go to Step (2)

טענה

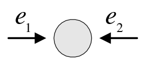
לאחר עדכון f בשלב 6 באלגוריתם, f היא עדיין פונקצית זרימה.

הוכחה

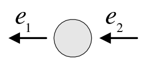
נביט בכל המצבים האפשריים של עדכון הקשתות, ונראה כי תנאי פונקצית הזרימה מתקיימים.



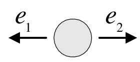
e_1, e_2 הוגדלו שניהם ב- Δ בשלב 6. לפני העדכון, התקיים $e_1 = e_2$ ולכן גם אחרי העדכון הזרימה הנכנסת שווה לזרימה היוצאת.



$e_2 \leftarrow e_2 - \Delta, e_1 \leftarrow e_1 + \Delta$. מתקיים כי הזרימה הנכנסת שווה לזרימה היוצאת.



$e_2 \leftarrow e_2 - \Delta, e_1 \leftarrow e_1 - \Delta$. מתקיים כי הזרימה הנכנסת שווה לזרימה היוצאת.



$e_2 \leftarrow e_2 + \Delta, e_1 \leftarrow e_1 - \Delta$. מתקיים כי הזרימה הנכנסת שווה לזרימה היוצאת.

טענה

בהנחה שהאלגוריתם עוצר, אזי במעבר האחרון על הצמתים איננו מגיעים אל צומת t. קבוצת הצמתים בהן ביקרנו במעבר האחרון תסומן ב-S. מתקיים:
אם קשת $x \xrightarrow{e} y$ שייכת ל- $(S : \bar{S})$ אזי היא קשת רוויה - $f(e) = c(e)$.
אם קשת $x \xleftarrow{e} y$ שייכת ל- $(\bar{S} : S)$ אזי מתקיים כי $f(e) = 0$.

הערות

מתעוררת השאלה - האם האלגוריתם מסתיים?
נשים לב לתכונה של האלגוריתם - אם פונקצית הזרימה ההתחלתית נותנת ערכים שלמים בלבד, וגם הקיבולים הינם ערכים שלמים, הרי שגם פונקצית הזרימה הסופית תיתן ערכים שלמים בלבד.
מכיוון שכל מסלול שיפור יגדיל את הזרימה לפחות ב-1, ומכיוון שהקיבול של כל צומת הוא סופי, אזי קיים מספר סופי של מסלולים אפשריים, ולכן אם אנו מתעסקים בקיבולים שלמים בלבד, האלגוריתם יסתיים בסופו של דבר.
אותה טענה נכונה גם לגבי מספרים רציונליים, מכיוון שעוצמתם זהה לזו של השלמים.
אם זאת, האלגוריתם לא תמיד מסתיים. מפתחי האלגוריתם הראו דוגמא לרשת בה האלגוריתם ייכשל, וזאת כאשר אנו מרשים קיבולים אי רציונליים. בדוגמא שהראו, לא רק שהאלגוריתם לא יסתיים, אלא הוא גם לא ימצא זרימה מקסימום, והערך של הזרימה אליה ישאף האלגוריתם יהיה כרבע מזרימת המקסימום.
גם כאשר אנו עוסקים במספרים שלמים, עבורם כבר טענו כי האלגוריתם סופי, האלגוריתם סובל מחוסר דטרמיניסטיות חזק. ניתן לבנות בקלות רשת עבורה מספר הצעדים שהאלגוריתם יכול לבצע עד למציאת המקסימום יהיה גדול במספר סדרי גודל ממספר הצעדים הדרוש למציאת זרימת המקסימום, וזאת על ידי בחירה גרועה במיוחד של המסלול אותו נשפר כל פעם.

את בעיה זו פתרו Edmonds ו-Karp. הם הוכיחו כי בעזרת שימוש ב-BFS כאשר אנו סורקים את הרשת בשלב הסימון, ובחירה בכל פעם של מסלול השיפור הקצר ביותר, האלגוריתם יכול להסתיים בזמן של $O\left(|V|^3 \cdot |E|\right)$, ללא קשר לקיבולים הנתונים.
Dinic הציע אלגוריתם משופר לאלגוריתם זה, שסיבוכיות הזמן שלו הינה $O\left(|V|^2 \cdot |E|\right)$.

<u>מסקנה</u>

על ידי בחירת אסטרטגית סימון נכונה, מובטח כי האלגוריתם של Ford ו-Fulkerson יסתיים.

האלגוריתם של Dinic

בדומה לאלגוריתמים שראינו קודם, האלגוריתם של Dinic מתחיל עם זרימה חוקית כלשהי f ומשפר אותה. האלגוריתם עוצר כאשר אין שיפור אפשרי, ואז מתקיים כי הזרימה היא מקסימום.

<u>רשת השכבות</u>

רשת השכבות של גרף $G(V,E)$ עם זרימה f תוגדר על ידי האלגוריתם הבא:

(1) $V_0 \leftarrow \{s\}, i \leftarrow 0$.

(2) Construct $T \leftarrow \{v \mid v \notin V_j$ for $j \le i$ and there is a useful edge from a vertex of V_i to $v\}$.

(3) If T is empty, the present total flow F is maximum, halt.

(4) If T contains t then $l \leftarrow i+1, V_l \leftarrow \{t\}$ and halt.

(5) Let $V_{i+1} \leftarrow T$, increment i and return to step (2).

נכנה את אוסף כל ה- V_i בשם **שכבות**.

עבור כל $1 \le i \le l$ נגדיר את E_i להיות קבוצת הקשתות המועילות מצומת ב- V_{i-1} אל צומת ב- V_i.

סיבוכיות האלגוריתם: בזמן בניית רשת השכבות אנו מבקרים בכל קשת בגרף לכל היותר פעמיים - פעם אחת בכל כיוון, ולכן סיבוכיות אלגוריתם זה הינה $O(|E|)$.

<u>למה 3</u>

אם בניית רשת השכבות עוצרת בשלב (3), אזי הזרימה הכללית הנוכחית, F, היא מקסימום.

<u>רשת התיקונים</u>

רשת התיקונים של גרף $G(V,E)$ עם זרימה f וקיבול c תוגדר בצורה הבאה:

עבור כל קשת e הנמצאת ב- E, מוסיפים בגרף התיקונים שתי קשתות, קשת קדימה וקשת אחורה. הקיבול של הקשת שתכוון קדימה יהיה $c(e_1) = c(e) - f(e)$, ואילו הקיבול של הקשת המכוונת אחוריה יהיה $c(e_2) = f(e)$. הקשתות הנ"ל יהיו בפועל בגרף התיקונים רק אם הן מועילות. לפיכך, בגרף התיקונים יהיה לכל היותר $2 \cdot |E|$ קשתות. למה נרצה להוסיף קשתות בשני הכיוונים? מכיוון שייתכן למשל שבקשת קדימה, אם נקטין את הזרימה, עדיין נגדיל את הזרימה הכוללת, ולכן הקטנת הזרימה (כלומר שימוש בקשת אחורה) תהיה חלק ממסלול שיפור.

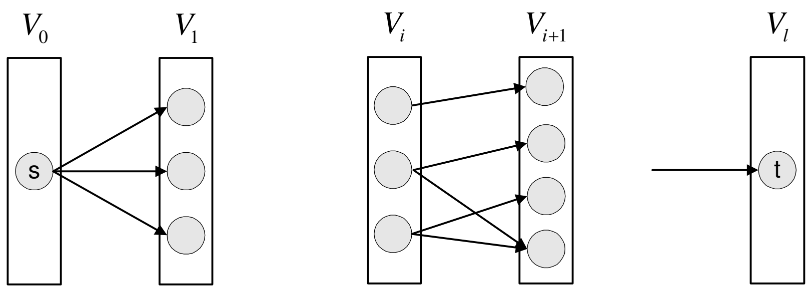
האלגוריתם של Dinic

בהינתן פונקציית זרימה f ורשת $N\left(G\left(V,E\right),s,t,c\right)$:

1. כל עוד לא נקבע כי הזרימה f היא מקסימום :
2. בנה את רשת התיקונים $N'\left(G'\left(V,E'\right),s,t,c'\right)$.
3. בנה את רשת השכבות (BFS) על N', על מנת לקבל $N''\left(G''\left(V,E''\right),s,t,c''\right)$.
   (בין שתי שכבות מקשרות הקשתות המועילות בלבד).
4. מצא זרימה מקסימלית ב- N'' (לא בהכרח מקסימום).
5. שפר את f בהתאם לזרימה שנמצאה.

שורה 2 - רשת התיקונים
על כל קשת בגרף המקורי, לפי הזרימה, מוסיפים קשת קדימה וקשת אחורה בכיוון בו נשתמש.

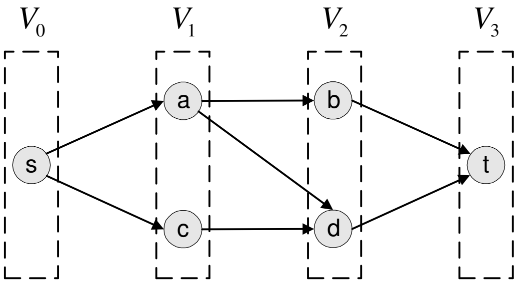
שורה 3 - בניית רשת השכבות



בין השכבות V_i,V_{i+1} מופיעה קבוצת הקשתות E_i שהן קשתות מועילות (של רשת התיקונים) שמתחילות בצומת מ- V_i ומגיעות ל- V_{i+1}. כאשר אנו מגיעים לשכבה בה מתגלה t, נעצור ונמחק את כל הקשתות שאינן נכנסות אל t.
כל המסלולים מ-s ל-t הם בדיוק באורך L קשתות. אם הגענו ל-t, נעצור ונאמר כי מצאנו מסלול שיפור. אם אנו מגיעים לשכבה ריקה, מצאנו זרימה מקסימום.
כל שכבה נבנה מהשיכבה הקודמת + קשתות מועילות שהולכות לצמתים חדשים.
כל אחת מהקשתות מקבלת את הקיבול מרשת התיקונים - $c'(e)$.
יש לשים לב שלא כל צומת ברשת התיקונים תופיע ברשת השכבות.
כמו כן, לא כל הקשתות ברשת השכבות יופיעו ברשת התיקונים.

שורה 4 - זרימה מקסימלית ב- N″
הזרימה f'' תקיים עבור כל קשת ברשת השכבות :
1. הזרימה חוקית בקשת $0\le f''\left(e''\right)\le c''\left(e''\right)$.
2. מאוזנת בכל צומת שאינו s ואינו t.
3. הזרימה תהיה זרימה מקסימלית ברשת השכבות.

זרימה מקסימלית: לא קיים אף מסלול מכוון קדימה מ-s אל t, כך שכל הקשתות בו עדיין מועילות ברשת השכבות, כלומר: על כל מסלול מכוון באורך L מ-s אל t קיימת לפחות קשת רוויה אחת.
נשים לב שזרימה מקסימלית איננה בהכרח זרימה מקסימום.
לדוגמא, נביט בגרף השכבות הבא:



אם נניח שהקיבול של כל קשת הוא 1, ונצעד במסלול מ-s אל t, דרך a ו-d, נקבל זרימה שהיא מקסימלית, אולם היא איננה מקסימום.

עבור כל קשת e הנמצאת ב- E_j נגדיר את $\tilde{c}(e)$:

1. אם $u \in V_{j-1}, v \in V_j$ וגם $u \xrightarrow{e} v$, נגדיר $\tilde{c}(e) = c(e) - f(e)$.
2. אם $u \in V_{j-1}, v \in V_j$ וגם $u \xleftarrow{e} v$, נגדיר $\tilde{c}(e) = f(e)$

<u>הגדרה</u>

נכנה את שורות 2-5 באלגוריתם בשם **פאזה** (phase).

<u>הגדרה</u>

אורך רשת השכבות הוא האינדקס של השכבה האחרונה ברשת השכבות.
נסמן ב- l_k את האורך של רשת השכבות בפאזה ה- k-ית.

<u>למה 4</u>

אם הפאזה ה- $k+1$ איננה הפאזה האחרונה, אז מתקיים כי $l_{k+1} > l_k$.

זרימה ברשתות עם חסמים עליונים ותחתונים

עד כה הנחנו כי הזרימה בקשתות מוגבלת על ידי ערך חיובי כלשהו כגבול עליון, ו-0 כגבול תחתון. החשיבות שהייתה להנחה זו, היא שיכלונו להניח כי השמת $f(e)=0$ עבור כל קשת e נותנת לנו זרימה חוקית, ומכאן יכולנו להמשיך באלגוריתמים לשיפור הזרימה ללא כל קושי. כעת נבטל את הנחה זו, ונניח כי הזרימה חסומה גם מלמטה, על ידי $b(e)$.

פונקצית זרימה $f: E \to R^{\geq 0}$ צריכה לקיים את התנאים הבאים:

1. **חוק הקשת:** עבור כל קשת $e \in E$, נדרוש כי $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$.
2. **חוק הצומת:** לכל צומת v שאיננו s או t, מתקיים כי $\sum_{e\in\beta(v)} f(e) = \sum_{e\in\alpha(v)} f(e)$.

הדרישה השניה שהייתה נכונה לגבי ההגדרה הקודמת שנתנו לפונקצית זרימה נשארה בלא שינוי.

הגדרה

בהינתן קשת $u \xrightarrow{e} v$, נאמר ש-e **קשת מועילה** אם מתקיים אחד מהשניים:

1. e היא קשת קדימה וגם $f(x) < c(e)$.
2. e היא קשת אחורה וגם $f(e) > b(e)$.

טענה

למה 1, האומרת כי עבור כל S ועבור כל f מתקיים $\mathrm{F} = \sum_{e\in(S:\bar{S})} f(e) - \sum_{e\in(\bar{S}:S)} f(e)$, נכונה גם כאשר אנו מדברים על רשתות עם חסמים עליונים ותחתונים.

הגדרה

נגדיר מחדש את **ערך החתך**:

$$C = \sum_{e\in(S:\bar{S})} c(e) - \sum_{e\in(\bar{S}:S)} b(e)$$

ההגדרה הגיונית מכיוון ערך החתך הוא חסם עליון על הזרימה בחתך.

מציאת זרימה מקסימום

הבעיה של מציאת זרימת מקסימום ברשת עם חסמים עליונים ותחתונים מתחלקת לשני שלבים:

1. בדיקה האם קיימת זרימה חוקית ברשת. אם כן, מציאת זרימה כזו.
2. הגדלת הזרימה החוקית שנמצאה על מנת למצוא זרימת מקסימום.

מציאת זרימה חוקית

נציג כעת שיטה לבדיקה האם לרשת נתונה יש פונקצית זרימה חוקית. אם כן, אנו גם מוצאים פונקצית זרימה כזו. הרשת המקורית היא $N\left(G(V,E),s,t,c\right)$.

נגדיר רשת חדשה $\bar{N}\left(\bar{G}(\bar{V},\bar{E}),\bar{s},\bar{t},\bar{c}\right)$ בצורה הבאה:

1. $\bar{V}=\{\bar{s},\bar{t}\}\cup V$ כאשר $\bar{s},\bar{t}$ הם צמתים חדשים, שיכונו **מקור עזר ובור עזר.**
2. עבור כל $v\in V$ ניצור קשת $v\xrightarrow{\tau}\bar{t}$ עם חסם עליון לזרימה (קיבול) - $\bar{c}(\tau)=\sum_{e\in\beta(v)}b(e)$, כאשר $\beta(v)$ זוהי קבוצת הקשתות היוצאות מ-v בגרף G. החסם התחתון לזרימה יהיה אפס.
3. עבור כל $v\in V$ ניצור קשת $s\xrightarrow{\sigma}\bar{v}$ עם חסם עליון לזרימה (קיבול) - $\bar{c}(\tau)=\sum_{e\in\alpha(v)}b(e)$, כאשר $\alpha(v)$ היא קבוצת הקשתות הנכנסות ל-v בגרף G.
4. קבוצת הקשתות E נשארת בגרף החדש, אולם החסמים העליונים והתחתונים על הקיבול משתנים. החסמים הנמוכים של כל הקשתות נקבעים ל-0, והחסם העליון של כל קשת $e\in E$ מוגדר כך: $\bar{c}(e)=c(e)-b(e)$.
5. צור קשתות חדשות: $s\xrightarrow{e}t, t\xrightarrow{e'}s$ עם חסמים עליונים $c(e)=\infty, c(e')=\infty$ ועם חסמים תחתונים 0.

אנו מקבלים היא רשת שלה מקור $\bar{s}$ ובור $\bar{t}$. המקור והבור של הרשת המקורית - s,t, הינם צמתים רגילים בגרף החדש, המקיימים את חוק הצומת וחוק הקשת.

טענה

לרשת המקורית יש זרימה חוקית אם ורק אם מתקיים כי בפונקצית זרימת המקסימום של הרשת $\bar{N}\left(\bar{G}(\bar{V},\bar{E}),\bar{s},\bar{t},\bar{c}\right)$ כל הקשתות היוצאות מ-$\bar{s}$ רוויות.

מציאת זרימת מקסימום

על מנת למצוא זרימת מקסימום, נשפר את הזרימה החוקית שהצלחנו למצוא ברשת. נוכל להשתמש, למשל, באלגוריתם Ford-Fulkerson עם שינוי קל: נצטרך להגדיר מחדש את המושג קשת מועילה במקרה של קשת אחורה:

קשת אחורה $u\xleftarrow{e}v$ תיקרא מועילה אם:

1. u מסומן ו-v איננו מסומן.
2. $f(e)>b(e)$

מציאת זרימת מינימום

על מנת למצוא זרימת מינימום ברשת עם חסמים תחתונים ועליונים, נהפוך את המקור לבור ואת הבור למקום, ונמצא זרימת מקסימום.
מתקיים כי אם הזרימה מ- t ל- s היא מקסימום, אזי הזרימה מ- s אל t היא מינימום.

אופן מציאת זרימת מינימום

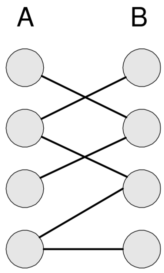
נהפוך את תפקידי המקור והבור, כלומר s יהיה בתפקיד הבור ו-t יהיה בתפקיד המקור. אם נסמן ב- f את פונקצית הזרימה ברשת המקורית וב- f' את אותה פונקצית הזרימה ברשת בה התפקידים הפוכים, אזי יתקיים (כאשר $N^+(v)$ מציין את קבוצת הקשתות אשר נכנסות ל-v ו- $N^-(v)$ מציין את קבוצת הקשתות אשר יוצאות מ-v):

$$|f| = \sum_{e\in N^+(t)} f(e) - \sum_{e\in N^-(t)} f(e) = -\left(\sum_{e\in N^-(t)} f(e) - \sum_{e\in N^+(t)} f(e) \right) = -|f'|$$

ולכן f זרימת מינימום ברשת המקורית אם ורק אם f' זרימת מקסימום ברשת עם התפקידים ההפוכים.

יישומים של זרימה ברשתות

בעיית השידוך



נתון גרף לא מכוון בו שתי קבוצות צמתים - A, B וכן קבוצת קשתות E. הקשתות מחברות בין איברים ב-A לאיברים ב-B. בין איברים ב-A לבין עצמם אין קשתות, ובין איברים ב-B לבין עצמם אין קשתות. גרף במבנה זה נקרא **גרף זוגי (bipartite)**.

<u>הגדרה</u>

קבוצת קשתות M של גרף חסר מעגלים $G(V,E)$ נקראת **שידוך** אם כל צומת משוייכת לכל היותר לקשת אחת בקבוצה M.

<u>בעיית השידוך</u>

המטרה: למצוא מספר מירבי של שידוכים (קשתות), כך שאין שתי קשתות שיש להן צומת משותף.

נבנה רשת $N\left(\bar{G}(\bar{V},\bar{E}),s,t,c\right)$ על מנת לפתור את בעייה זו:

1. $\bar{V}=\{s,t\}\cup V$.
2. $\bar{E}=\{s\to a\mid a\in A\}\cup\{b\to t\mid b\in B\}\cup\left\{a\to b\mid a\text{—b in G}\right\}$.

אנו מכוונים את כל הקשתות מימין לשמאל.
מ-s יש קשת לכל אחד מאיבר A. אל t נכנסת קשת מכל איבר ב-B.
כל הקיבולים בקשתות היוצאות מ-s ובקשתות הנכנסות אל t הם 1.
לשאר הקשתות, אלו שבין A ל-B, ניתן קיבול ∞.

לאחר שנבנה את הרשת, נפתור את בעיית זרימת מקסימום ברשת הזרימה N.
כל החסמים התחתונים הינם 0 במקרה זה.
נמצא זרימת מקסימום, ונסמן ב-F את ערך זרימת המקסימום הכללית.

<u>משפט</u>

מספר הקשתות בשידוך המקסימלי של גרף זוגי, שווה לערך זרימת המקסימום, ברשת המתאימה $N(G)$, כלומר $F=M$.

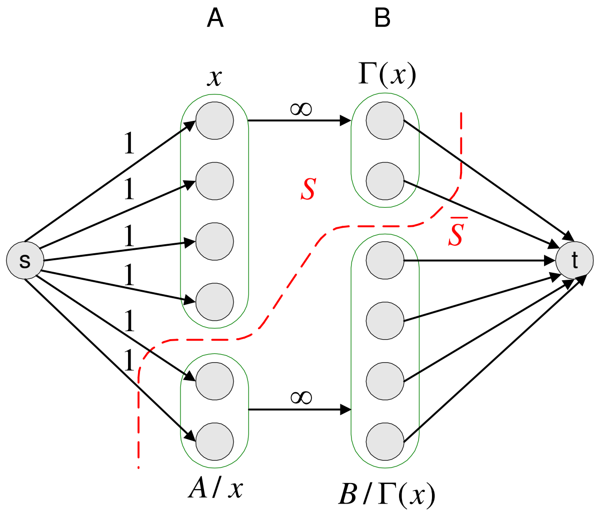
<u>הגדרה</u>

יהי $G(A,B,E)$ גרף זוגי. שידוך M ב-G נקרא **שידוך מלא** אם כל צמתי A משודכים.

משפט Hall

יהי $G\left(A,B,E\right)$ גרף זוגי ותהי קבוצה $x\subset A$. נסמן ב- $\Gamma(x)$ את כל השכנים ב-B של צמתים ב-x.
משפט Hall אומר: ב-G יש שידוך מלא אם ורק אם מתקיים תנאי Hall:
עבור כל $x\subset A$, מתקיים כי $\left|\Gamma(x)\right|>\left|x\right|$.

הוכחת המשפט



הכרחיות המשפט טריוויאלית - אם אין מספיק צמתים ב-B, הגרף לא יכול להיות מלא. נותר להוכיח רק את מספיקות התנאי של Hall.
הוכחה בדרך השלילה: נניח כי אין שידוך מלא, וכן מתקיים תנאי Hall.
השידוך אינו מלא - כלומר הזרימה תהיה פחות ממספר הקשתות הנכנסות ל-A, ומכאן יש צמתים ב-A שאין להם בן זוג ב-B.
נסתכל על חתך מסוים S - חלק מהצמתים ב-A וחלק מהצמתים ב-B נמצאים בו.
נסתכל על הקשתות $\left(A/x\right)\rightarrow S$. הן כולם רוויות.
כל הצמתים המסומנים ב-B, סומנו על ידי כך שהגענו אליהם בעזרת קשת מ-A ל-B. מכאן קבוצה זו היא $\Gamma(x)$.
אין קשתות מ- $A\rightarrow B/\Gamma(x)$. כמו כן, בכל הקשתות $A/X\rightarrow B$ יש זרימה 0.
נשתמש במשפט האומר שמספר הקשתות בשידוך המקסימלי של גרף זוגי, שווה לערך זרימת המקסימום. נסתכל על החתך $\left(S:\overline{S}\right)$:

$$\left|A\right|>M=F=\left|A/x\right|+\left|\Gamma(x)\right|$$

$$\left|A/x\right|=\left|A\right|-\left|x\right|\Rightarrow\left|A\right|>\left|A\right|-\left|x\right|+\left|\Gamma(x)\right|\Rightarrow\left|x\right|>\left|\Gamma(x)\right|$$

קיבלנו סתירה לתנאי Hall, ומכאן שאם אין שידוך מלא - תנאי Hall מופר.

גרף PERT (נלקח מחוברת התרגולים של הקורס "אלגוריתמים בתורת הגרפים" בטכניון)

הגדרה

גרף מכוון וסופי $G(V,E)$ יקרא **גרף PERT** אם הוא מקיים את התנאים הבאים:
1. G הוא חסר מעגלים מכוונים.
2. קיימים שני צמתים שונים s ו-t, להם נקרא צומת ההתחלה וצומת הסיום, המקיימים שכל צומת נמצא על מסלול מ-s ל-t.

שימוש

בדרך כלל, אנו משתמשים בגרפים מסוג PERT במשמעות הבאה:
כל קשת מייצגת משימה, ונאמר כי **ניתן להתחיל לבצע** את המשימה (u,v) אם ורק אם הסתיים ביצוע של כל המשימות שמתאימות לקשתות אשר נכנסות ל-u.
את המשימות יש לשבץ על מכונות אשר כל אחת מסוגלת בכל רגע נתון לבצע משימה בודדת. נאמר כי **ניתן לבצע משימה** אם ורק אם ניתן להתחיל לבצע אותה וגם קיימת מכונה פנויה (אם לא קיימת מכונה פנויה המשימה תתעכב עד אשר תתפנה מכונה).

דוגמא לבעיה

לכל משימה ישנו משך זמן הדרוש לביצועה. זמנים אלו אינם נתונים בקלט.
המטרה: למצוא את מספר המינימום של מכונות כך שלכל בחירה של משכי זמן לכל המשימות, אף משימה לא תתעכב.

הפתרון: נבנה את רשת הזרימה הבאה עם חסמים עליונים ותחתונים – G יהיה הגרף המכוון של הרשת, הצומת s יהיה המקור והצומת t יהיה הבור. לכל קשת e ניתן חסם עליון של ∞ וחסם תחתון של 1. נמצא ברשת זו זרימת מינימום: f^* מ-s ל-t. ניתן לראות כי קיימת זרימת מינימום חוקית ברשת זו, וכי $|f^*|>0$.
בנוסף משום שכל החסמים התחתונים הם שלמים, נקבל כי $|f^*|$ שלמה. נניח גם, בלי הגבלת הכלליות, כי $f^*(e)$ שלם, לכל קשת e. נפרק כעת את f^* למסלולים (לא בהכרח זרים). אנו נמצא את הפירוק למסלולים באופן הבא:

כל עוד הזרימה שנותרה אינה 0, בצע "סרוק" מ-s על-פני קשתות אשר הזרימה שנותרה עליהן גדולה ממש מ-0. סרוק זה יסתיים ב-t, צרף את המסלול אשר הסרוק מצא לאוסף המסלולים A. הפחת 1 מהזרימה שנותרה עבור כל הקשתות מהמסלול שנמצא באיטרציה הנוכחית.
יש להתחיל באיטרציה הראשונה עם הזרימה f^*.

היות ש- $|f^*|>0$, בהכרח קיימת קשת (s,v) כך שמתקיים: $f^*(s,v)>0$. ולכן משום ש- f^* שלמה, התהליך אשר תארנו למעלה יוכל להתחיל. כל עוד הזרימה שנותרה אינה 0, מאותם שיקולים בדיוק התהליך לא יכשל. תהליך זה יפסיק, משום שבכל איטרציה, אנו מורידים את ערך הזרימה שנותרה ב-1 בדיוק.

<u>מסקנה 1</u>

לכל קשת (u,v) קיים מסלול $p\in A$, כך ש- (u,v) נמצאת ב- p.

<u>מסקנה 2</u>

אם נקצה מכונה לכל מסלול ב-A, אזי המסלולים מגדירים שיבוץ חוקי שבו אף משימה אינה ממתינה לכל בחירה של משכי זמן.

נשים לב כי $|f^*|=|A|$.

לכן הראנו כי אנו זקוקים ל- $|f^*|$ מכונות לכל הפחות.